ФГОБУ ВО «Финансовый университет
при правительстве Российской Федерации»

И.Г. Шандра

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Учебник
для студентов бакалавриата и магистратуры
экономических вузов и факультетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ
МОСКВА
2018

УДК 330.42
ББК 65.23я7
Ш20

Рецензент

Шаповал А. Б. — доктор физико-математических наук, профессор НИУ ВШЭ

Рылов А. А. — кандидат физико-математических наук, доцент Финансового университета при Правительстве РФ

Шандра, Игорь Георгиевич.

Ш20 Математическая экономика : учебник для студентов бакалавриата и магистратуры экономических вузов и факультетов / И. Г. Шандра. — М.: Прометей, 2018. — 176 с.

ISBN 978-5-907003-04-0

Излагается математическая теория потребления (предпочтения, выбор потребителя, функции спроса), математическая теория производства (производственные функции и функции предложения), линейные экономические модели и продуктивность, модели экономической динамики с непрерывным и дискретным временем.

Для студентов, обучающихся по направлениям «Экономика», «Прикладная математика и информатика»и другим направлениям бакалавриата, а также магистрантам, аспирантам и преподователям.

ISBN 978-5-907003-04-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая экономика — это наука, являющаяся составной частью прикладной математики, занимающаяся построением и исследованием математических моделей в экономике и представляющая собой методологическую основу современной экономики. Авторами первых работ по математической экономике, появившихся ещё в XIX веке, были Л. Вальрас, К. Менгер, У. С. Джевонс, А. Курно. В дальнейшем большой вклад в развитие математической экономики внесли Е. Слуцкий, В. Леонтьев, Дж. фон Нейман, А. Вальд, Л. Канторович, К. Эрроу, Г. Дебре.

Построение математической экономики напоминает аксиоматическое построение школьной геометрии: постулируются аксиомы экономического характера и на их основе строится абстрактная экономическая модель, позволяющая достаточно хорошо описывать и анализировать реальные экономические процессы.

Данный учебник базируется на курсе лекций, читаемых автором на протяжении 15 лет на различных факультетах Финансового университета при Правительстве РФ. Состоит из пяти глав. Первая посвящена математической теории потребления. Здесь рассмотрены предпочтения потребителей, производственные функции, оптимизационная задача потребителя, исследованы свойства функции спроса и косвенной функции полезности. Вторая глава посвящена математической теории производства. В ней изучаются различные классы производственных функций, оптимизационная задача производителя, свойства функции предложения, функций спроса на ресурсы и косвенной производственной функции. Третья глава посвящена теории неотрицательных матриц и линейным экономическим моделям. В четвёртой главе рассмотрены модели экономической динамики с непрерывным временем, а в пятой главе — модели с дискретным временем. Каждая глава снабжена вопросами и упражнениями для самостоятельного решения. В конце издания имеются три приложения, посвящённые бинарным отношениям, дифференциальным и разностным уравнениям.

Учебник написан на основе компетентстного подхода и соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по направлениям подготовки «Экономика», «Прикладная информатика и математика»*, которые предполагают не только усвоение студентом не связанных друг с другом знаний и умений, но и овладение ими в комплексе.

Компетенции для направления «Экономика»

Код	Компетенция	Знания, умения, владения
ПКН-3	способность применять математические методы для решения стандартных профессиональных финансово-экономических задач, интерпретировать полученные математические результаты	Знать основные понятия, методики расчетов и методы исследований , необходимые для успешного решения математических и экономических задач. Уметь строить типовые математические модели макро- и микроэкономики, интерпретировать результаты решения задач. Владеть навыками применения современного математического инструментария для решения задач макро- и микроэкономики.
ПКП-2	способность выбирать и использовать оптимальные методы и методики расчета финансовых показателей	Знать основные понятия, методики расчетов и методы, необходимые для успешного решения задач макро- и микроэкономики. Уметь решать типовые экономико-математические задачи,

* См.: Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г. (Распоряжение Правительства РФ № 1756-р от 29.12.01 г.) // Народное образование. – 2002. – № 4

Код	Компетенция	Знания, умения, владения
		применять соответствующие методы и знания высшей математики для решения математических и экономических задач Владеть методикой построения, анализа и применения математических моделей задач макро- и микроэкономики.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ

1.1. Потребительские предпочтения

Главными понятиями теории потребления являются ***благо*** — товар или услуга, существующая на рынке, и ***потребитель*** — субъект (индивидуум или домашнее хозяйство), потребляющие предлагаемые блага.

Предполагается, что потребитель действует ***рационально***. Это означает, что он осуществляет свой выбор среди доступных ему различных наборов благ таким образом, чтобы максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Другими словами, потребитель:

а) упорядочивает наборы благ на основе своих личных предпочтений;

б) выбирает среди доступных ему наборов благ наилучший набор.

Таким образом, потребитель даёт ответы на следующие вопросы:

1) что для меня желаемо?

2) что для меня доступно?

3) что из доступного самое желаемое?

Ответы на эти три вопроса будут даны в этой главе.

1.1.1. Пространство благ и потребительское множество

Начнём с ответа на первый вопрос потребителя и определим множество «желаемых» благ или так называемое *потребительское множество*.

Пусть на рынке существует n благ. Будем считать, что все блага бесконечно делимы и могут потребляться лишь в неотрицательном количестве.

Определение 1.1. *Вектор* $x=(x_1,\ldots,x_n)$, *где* $x_i(\geq 0)$ — *количество i-го блага* (i=1,.., n), *будем называть* ***набором (вектором) благ****, неотрицательный ортант*

$$\mathbb{R}_+^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_i\geq 0;\ i=1,\ldots,n\}$$

— ***пространством благ****, а множество* $X\subset\mathbb{R}_+^n$ *всех физически возможных наборов благ —* ***потребительским множеством****.*

На потребительское множество X налагаются следующие требования:

1) ***Замкнутость*** (это означает, что множеству X принадлежат все его предельные точки).

Иначе говоря, если все члены произвольной сходящиеся последовательности $\{x_k\}$ принадлежат X (являются желаемыми наборами), то $\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ также принадлежит X (является желаемым набором).

2) ***Выпуклость*** (означает, что множеству X вместе с любыми его двумя элементами принадлежит и соединяющий их отрезок):

$$\forall x,y\in X;\ \forall t\in[0;1]\Rightarrow tx+(1-t)y\in X \qquad (1.1)$$

Другими словами, если x и y являются желаемыми наборами, то любая «взвешенная смесь» также является желаемым набором.

3) Нулевой набор благ является желаемым.

$$0=(0,\cdots,0)\in X\ .$$

Это требование означает, что потребитель может ничего не потреблять. Такая ситуация принципиально возможна, но это не означает, что нулевой набор будет выбором потребителя.

Замечание 1.1. Понятно, что потребительское множество должно быть ограниченным. Это обусловлено ограниченными технологическими возможностями экономики и ресурсной базы. Однако для упрощения проведения исследований зачастую целесообразно оказаться от этого ограничения (понимая, что возможности экономики настолько велики по сравнению с микроэкономическими потребностями отдельного потребителя, что технологическими границы экономики можно считать отодвинутыми на бесконечность). Отнесёмся к этому с пониманием.

1.1.2. Отношение предпочтения

Определение 1.2. *Бинарное отношение $\succeq$ на множестве X называется* ***(нестрогим) отношением предпочтения****, если оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):*

А1) ***полноты***:

$$\forall\, x, y \in X\colon (x \succeq y) \vee (y \succeq x); \tag{1.2}$$

А2) ***транзитивности***: $\forall\, x, y, z \in X$:

$$(x \succeq y) \wedge (y \succeq z) \Rightarrow (x \succeq z). \tag{1.3}$$

При этом, если $x \succeq y$, то говорят, что x ***предпочтительнее (не хуже)****, чем y.*

Полнота позволяет сравнить любые два набора благ из потребительского множества, а *транзитивность* обеспечивает согласованность (непротиворечивость) потребительского предпочтения.

Определение 1.3. *Если $x \succeq y$, но при этом $y \not\succeq x$, то говорят, что x* ***строго предпочтительнее (лучше)****, чем y и обозначают $x \succ y$.*

Определение 1.4. *Если же $x \succeq y$ и $y \succeq x$, то говорят, что x и y* ***безразличны*** *и обозначают $x \sim y$.*

Замечание 1.2. *Полнота* отношения предпочтения $\succeq$ равносильна тому, что для любых элементов x и y выполняется одно из несовместных условий:

$$x \succ y \text{ или } x \sim y \text{ или } y \succ x\,. \tag{1.4}$$

Действительно, $\forall\, x, y \in X$:

$$(x \succeq y) \vee (y \succeq x) \Leftrightarrow ((x \succeq y) \wedge (y \not\succeq x)) \vee ((x \succeq y) \wedge (y \succeq x)) \vee$$
$$\vee ((y \succeq x) \wedge (x \not\succeq y)) \Leftrightarrow (x \succ y) \vee (x \sim y) \vee (y \succ x).$$

Теорема 1.1. *Отношение строгого предпочтения $\succ$ обладает следующими свойствами*:

а) ***асимметрично***:

$$\forall\, x, y \in X:\ x \succ y \Rightarrow y \nsucc x; \tag{1.5}$$

б) ***транзитивно***:

$$\forall\, x, y, z \in X:\ (x \succ y) \wedge (y \succ z) \Rightarrow x \succ z. \tag{1.6}$$

Доказательство. а) Докажем асимметричность. Из (1.4) следует:

$$x \succ y \Leftrightarrow (y \nsucc x) \wedge (x \nsim y); \tag{1.7}$$

Отсюда получаем

$$x \succ y \Rightarrow (y \nsucc x).$$

б) Докажем транзитивность. Предположим противное. Пусть $(x \succ y) \wedge (y \succ z)$ выполняется, но $x \nsucc z$, то есть $z \succeq x$. Имеем $(x \succ y) \wedge (y \succ z) \wedge (z \succeq x) \Leftrightarrow (x \succ y) \wedge (y \succeq z) \wedge (z \nsucceq y) \wedge (z \succeq x)$.

В силу транзитивности $\succeq$:

$$(y \succeq z) \wedge (z \succeq x) \Rightarrow (y \succeq x),$$

а это противоречит тому, что $x \succ y$. Следовательно, $x \succ z$. ■

Теорема 1.2. *Отношение безразличия ~ удовлетворяет условиям*:

а) рефлективности:

$$\forall\, x\colon x \sim x;$$

б) симметричности:

$$\forall\, x, y\colon x \sim y \Rightarrow y \sim x;$$

в) транзитивности:

$$\forall\, x, y, z\colon x \sim y \wedge\ y \sim z \Rightarrow x \sim z.$$

Доказательство теоремы тривиально. Предлагаем провести его самостоятельно в качестве упражнения.

Замечание 1.3. Из Теоремы 1.2 следует, что *отношение безразличия* является *отношением эквивалентности* (см. Приложение 1) и задаёт разбиение множества X на классы эквивалентности, называемые ***множествами безразличия*** (***кривыми безразличия*** в случае $n = 2$).

Приведём примеры некоторых видов отношений предпочтения, естественным образом возникающих на $\mathbb{R}_{+}^{n}$.

Пример 1.1. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ — произвольные наборы благ. Тогда отношение предпочтения $\succeq$ на $\mathbb{R}_+^n$ можно определить одним из следующим способов:

1) $x \succeq y$, если $x_1 \geq y_1$;

2) $x \succeq y$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$;

3) $x \succeq y$, если $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \geq \prod\limits_{i=1}^{n} y_i$.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в выполнении всех аксиом для приведенных в Примере 1.1 отношений предпочтения и найти в каждом случае соответствующие отношение безразличия.

Пример 1.2. Пусть на множестве X задана действительная функция $U(x)$, тогда на X задано отношение предпочтения $\succeq$, определяемое соотношением:

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y);\ \forall\ x, y \in X. \tag{1.8}$$

Отношение строгого предпочтения и отношения безразличия в данном случае задаются следующим образом:

$$x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y); \tag{1.9}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow U(x) = U(y). \tag{1.10}$$

Наряду с аксиомами А1 и А2 на отношения предпочтения потребителя могут накладываться и другие условия. Мы будем последовательно вводить эти дополнительные ограничения, двигаясь от менее жёстких к более жёстким.

1.1.3. Непрерывные предпочтения

Определение 1.5 (аксиома А3). *Отношение предпочтения $\succeq$ на множестве $X \subseteq \mathbb{R}_+^n$ называется* ***непрерывным****, если для любых двух сходящиеся последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ на X, удовлетворяющих условию $x_k \succeq y_k$ $(\forall\ k)$, имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} x_k \succeq \lim_{k\to\infty} y_k . \tag{1.11}$$

Другими словами предпочтение $\succeq$ *непрерывно*, если оно сохраняется при предельном переходе.

Теорема 1.3. *Для отношения предпочтения* $\succeq$, *заданного на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}_+^n$, *следующие утверждения равносильны*:

а) $\succeq$ *непрерывно;*

б) *если* $x \succ y$, *то существуют непересекающиеся окрестности* U_x *и* U_y *такие, что для любых* $a \in U_x$ *и* $b \in U_y$ *выполняется* $a \succ b$;

в) *множества*

$$L^+(y) = \{x \in X \mid x \succeq y\}; \qquad (1.12)$$

и

$$L^-(y) = \{x \in X \mid y \succeq x\} \qquad (1.13)$$

замкнуты для любого $y \in X$.

Определение 1.6. *Множества* $L^+(y)$ *и* $L^-(y)$ *называются соответственно* ***верхним и нижним лебеговым множеством***.

Замечание 1.4. *Непрерывность* содержательно означает, что при малом изменении наборов благ отношение предпочтения сохраняется.

Замечание 1.5. Из Теоремы 1.3 следует, что $C(x)$ — множество безразличие, порожденное элементом x, является замкнутым как пересечение двух замкнутых множеств: $C(x) = L^+(x) \cap L^-(x)$. Отсюда, в частности следует, что в случае, если множества безразличия являются линиями, то эти линии непрерывны.

Все отношения предпочтения, рассмотренные в Примере 1.1, являются непрерывными. Приведём пример отношения предпочтения, не удовлетворяющего этому условию.

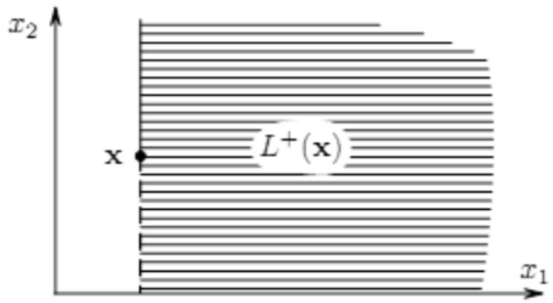
Пример. 1.3. Определим на $\mathbb{R}_+^2$ отношение предпочтения $\succeq$, называемое ***лексикографическим***, следующим образом: для любых $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ из $\mathbb{R}_+^2$

$$x \succeq y, \text{ если } x_1 > y_1 \text{ или } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \geq y_2. \qquad (1.14)$$

Очевидно, верхнее лебегово множество не замкнуто. А это свидетельствует о том, что лексикографическое отношение предпочтения не является непрерывным (см. рисунок далее).

1.1.4. Ненасыщаемые предпочтения

Определение 1.7. *Элемент* $y \in X$ *называется* ***точкой насыщения (максимальным элементом)*** *предпочтения* $\succeq$ *на множестве* X, *если*



$$y \succeq x;\ \forall\, x \in X. \tag{1.15}$$

Если же такого элемента не существует, то есть

$$\forall\, y \in X\ \exists\, x \in X:\ x \succ y;$$

то предпочтение называется ***ненасыщаемым.***

Замечание 1.6 *Насыщаемость* предпочтения зависит не только от свойств самого предпочтения, но и от множества, на котором оно задано предпочтение. Возможна ситуация, когда предпочтение ненасыщаемо на некотором множестве, но имеет точку насыщения на подмножестве этого множества.

Замечание 1.7. Предпочтение может не иметь на заданном множестве точек насыщения, может иметь одну или несколько таких точек. Если предпочтение иметь несколько точек насыщения, то все они принадлежат одному множеству безразличия (почему?).

Определение 1.8. *Элемент* $y \in X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ *называется* ***точкой локального насыщения*** *предпочтения* $\succeq$, *если существует такая окрестность* $U_y \subseteq X$ *этого элемента, что*

$$y \succeq x;\ \forall\, x \in U_y.$$

Если же такого элемента не существует, то есть если в любой окрестности любого элемента ***y*** *существует элемент* ***x*** *такой, что* $x \succ y$, *предпочтение называется* ***локально ненасыщаемым.***

Замечание 1.8. Если точка глобального насыщения является внутренней ($y \in \operatorname{Int} X$), то она является и точкой локального насыщения. Обратное не верно.

Замечание **1.9.** *Локальная ненасыщаемость* делает невозможным наличие «толстых» кривых безразличия, изображенных на рисунке ниже, то есть существование окрестностей, в которой все элементы безразличны.

Множества безразличия непрерывного локально ненасыщаемого предпочтения в случае двух благ представляют собой непрерывные линии.

Теорема 1.4. *Пусть y — точка насыщения локально ненасыщаемого предпочтения $\succeq$, заданного на множестве $X \subseteq \mathbb{R}_+^n$, тогда y является граничной точкой множества X.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Предположим противное, что y не является граничной точкой множества X. Тогда она является внутренней точкой, то есть принадлежит X вместе с некоторой своей окрестностью U_y. В этой окрестности в силу локальной ненасыщаемости предпочтения существует элемент x такой, что $x \succ y$. А это противоречит тому, что y — точка насыщения. ■

1.1.5. Монотонные предпочтения

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Определим на $\mathbb{R}^n$ следующие бинарные отношения:

1) $\geq$ (***больше либо равно***):

$$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i \ \forall i \tag{1.16}$$

2) $>$ (***больше***):

$$x > y \Leftrightarrow (x \geq y) \wedge (x \neq y) \tag{1.17}$$

3) $>$ (***строго больше***):

$$x \gg y \Leftrightarrow x_i > y_i \ \forall i \tag{1.18}$$

Замечание 1.10. Отношение «*больше либо равно*» $\geq$ обладает следующими свойствами:

а) *рефлексивность*: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \geq x;$$

б) *транзитивность*: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

$$x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z;$$

в) антисимметричность: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow y = x;.$$

г) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

$$x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z;$$

д) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha\ (> 0)$:

$$x \geq y \Rightarrow \alpha x \geq \alpha y.$$

Условия *а)* — *в)* говорят о том, что отношение $\geq$ является ***отношением (частичного) порядка*** на $\mathbb{R}^n$ и, так как это отношение согласовано с операциями сложения и умножения на скаляр (условия *г)* и *д)*), то $\mathbb{R}^n$ является ***(частично) упорядоченным векторным пространством.***

Замечание 1.11. Отношение «*больше*» $>$ удовлетворяет следующим условиям.

а) антирефлексивность: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$: $\quad x \quad x$;

б) транзитивность: $\forall\, x, y, z \,\forall\, \mathbb{R}^n$: $\quad x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$;

в) асимметричность: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$: $\quad x > y \Rightarrow y \not> x$.

Эти условия показывают, что отношение «*больше*» $>$ задаёт на $\mathbb{R}^n$ ***отношение строгого прядка.*** Отношение «*строго больше*» $\gg$ также является ***отношением строгого прядка*** на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.9 (Аксиома А4). *Отношение предпочтения* $\succeq$ *на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ *называется*:

а) ***слабо монотонным***, *если*

$$x \geq y \Rightarrow x \succeq y$$

б) ***монотонным***, *если*

$$x \gg y \Rightarrow x \succ y;$$

в) ***строго монотонным***, *если*

$$x > y \Rightarrow x \succ y.$$

Замечание 1.12. *Монотонность* характеризует тот факт, что для потребителя большее количество блага предпочтительнее, чем меньшее.

Замечание 1.13. Из *строгая монотонности* следует *монотонность, а из монотонности — слабая монотонность.*

Замечание 1.14. *Монотонное* предпочтение является *локально ненасыщаемым.*

Замечание 1.15. Линии безразличия монотонного предпочтения имеют неположительный наклон.

1.1.6. Выпуклые предпочтения

Определение 1.10. (Аксиома А5). *Отношение предпочтения $\succeq$, заданное на выпуклом множестве X называется:*

– ***выпуклым***, *если для любых x, y, $z \in X$ таких, что $x \succeq z$ и $y \succeq z$, и любого $t \in [0;1]$ следует*

$$tx + (1 - t)\, y \succeq z \tag{1.19}$$

– ***строго выпуклым***, *если для любых x, y, $z \in X$, $x \neq y$, таких, что $x \succeq y$ и $y \succeq z$ и любого $t \in (0;1)$ следует*

$$tx + (1 - t)\, y \succ z. \tag{1.20}$$

Замечание 1.16. С точки зрения потребительского предпочтения *выпуклость* означает, что потребителю предпочтительны «сбалансированные» наборы. Иначе говоря, он предпочитает не впадать в крайности, что, в принципе, достойно понимания.

Замечание 1.17. Из *строгой выпуклости* предпочтения следует его выпуклость. Обратное не верно.

Непосредственно из Определения 1.10 следует.

Теорема 1.5. *Отношение предпочтения $\succeq$, заданное на выпуклом множестве X является (строго) выпуклым тогда, когда множество $L^+(x) = \{y \in X |\, y \succeq x\}$ (строго) выпуклым для любого $x \in X$.*

Теорема 1.6. *Если предпочтение, заданное на выпуклом множестве X выпукло, то множество его точек глобального насыщения также выпукло.*

Доказательство. Пусть M — множество точек (глобального) насыщения и $x, y \in M$. Тогда для любого $z \in X$

$$x \succeq z \text{ и } y \succeq z.$$

Отсюда на основании выпуклости предпочтения следует, что для любого $t \in [0;1]$ и любого $z \in X$ $tx + (1 - t)y \succeq z$.

А это говорит о том, что точка $v = tx + (1 - t)y$ также является точкой глобального насыщения. То есть $tx + (1 - t)y \in M$, а, следовательно, M — выпукло.

Теорема 1.7. *Если строго выпуклое предпочтение, заданное на выпуклом множестве X имеет точку глобального насыщения, то точка является единственной.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть x и y $(x \neq y)$ — две точки глобального насыщения. Тогда для любого $z \in X$

$$x \succeq z \text{ и } y \succeq z.$$

Отсюда на основании строгой выпуклости предпочтения следует, что

$$0,5\,x + 0,5\,y \succ x.$$

А это противоречит тому, что x — точка глобального насыщения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 1.11. *Говорят, что поверхность* $\alpha \subset \mathbb{R}^n$ *имеет выпуклость, направленную в сторону начала координат, если любых двух точек* A *и* B*, принадлежащих поверхности, луч, проходящий через начало координат* O *и любую внутреннюю точку* C *отрезка* AB*, пресекает поверхность* α *по крайней мере в одной точке* D*, лежащей между точек* O *и* C*.*

Теорема 1.8. *Поверхности безразличия строго выпуклого строго монотонного предпочтения, заданного на выпуклом множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ *имеет выпуклость, направленную в сторону начала координат.*

Доказательство. Пусть α — поверхность безразличия, порождённая точкой $\alpha \subset X$. Пусть $b \in \alpha$ $(b \neq a)$. Тогда $b \sim a$ и в силу строгой выпуклости предпочтения внутренняя точка c отрезка, соединяющего a и b, будет строго предпочтительнее, чем a.

$$c = ta + (1 - t)\,b \succ a; \forall\, t \in (0;1).$$

Пусть d — точка пересечения поверхности безразличия α с лучом, соединяющим начало координат O и точку c. Тогда

$$c \succ d \sim a.$$

Так как предпочтение строго монотонно, то точка c должна лежать на луче выше, чем d. ■

1.2. Функция полезности

Отношение предпочтения, рассмотренное выше, является качественной категорией и плохо приспособлено для проведения количественных исследований. Для проведения таких исследований удобнее использовать функцию полезности — численный индикатор, позволяющий свести абстрактную операцию отношения предпочтения к отношениям между числами (больше, меньше, равно).

1.2.1. Задание предпочтения при помощи функции полезности

Определение 1.12. *Функция $U(x)$, определённая на подмножестве X пространства благ $\mathbb{R}_+^n$ называется* ***функцией полезности****, представляющей предпочтение $\succeq$, если $\forall$ x, $y \in X$:*

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y). \tag{1.21}$$

Напомним (см. Пример 1.2), что в случае задания предпочтения при помощи функции, соответствующие отношения безразличия и строгого предпочтения определяются соотношениями:

$$x \sim y \Leftrightarrow U(x) = U(y); \tag{1.22}$$

$$x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y). \tag{1.23}$$

Если предпочтения существует представляющая его функция полезности, то эта функция определена неоднозначно.

Теорема. 1.9. *Если $U(x)$ — функция полезности, представляющая предпочтение $\succeq$ и $f(U)$ — возрастающая функция, то функция $V(x) = f\big(U(x)\big)$ также является функцией полезности, представляющей предпочтение $\succeq$.*

Доказательство. Пусть $U(x)$ — функция полезности, представляющая предпочтение $\succeq$, тогда

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow f(U(x)) \geq f(U(y)); \forall\, x, y \in X.$$

Если $f(U)$ — возрастающая функция, то она сохраняет знак неравенства:

$$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow f(U(x)) \geq f(U(y)).$$

Следовательно,

$$x \succeq y \Leftrightarrow V(x) \geq V(y) \; \forall\, x, y \in X.$$

А значит, функция $V(x) = f\big(U(x)\big)$ является функцией полезности, представляющей предпочтение $\succeq$. ■

Естественно возникает вопрос: для всякого ли отношения предпочтения существует функция полезности.

Теорема 1.10. (Дебре). *Для любого непрерывного отношения предпочтения* $\succeq$ *, определённого на* $\mathbb{R}_+^n$*, существует представляющая его непрерывная функция полезности.*

Доказательство. Приведём идею доказательства в предположении, что предпочтение является строго монотонным. Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$ и $e = (1; 1; ...; 1)$ — эталонный набор благ. Поставим в соответствие набору x число t, такое что

$$te \sim x.$$

Число t является первой (любой) координатой точки пересечения луча Oe с кривой безразличия, порождённой набором x. Очевидно, что $t = U(x)$ является искомой функцией полезности.

Замечание 1.18. В теореме утверждается, что у непрерывного предпочтения существует непрерывная функция полезности. Это не означает, что все функции полезности, представляющие предпочтение будут непрерывными. Так если $U(x)$ — непрерывная функции полезности, то функции полезности $f(U(x))$ может быть разрывной, если f не является непрерывной. С другой стороны, если функция полезности непрерывна, то задаваемое ею предпочтение будет непрерывным.

Определение 1.13. *Функция* $U(x)$*, заданная на выпуклом множестве* X *называется*:

– ***квазивогнутой***, *если для любых* x, $y \in X$ *и любого* $t \in [0;1]$:

$$U(tx+(1-t)y) \geq \min\{U(x);U(y)\}\,; \qquad (1.24)$$

– ***строго квазивогнутой***, *если для любых* x, $y \in X$ $(x \neq y)$ *и любого* $t \in (0;1)$:

$$U(tx+(1-t)y) > \min\{U(x);U(y)\}\,; \qquad (1.25)$$

– ***вогнутой***, *если для любых* x, $y \in X$ *и любого* $t \in [0;1]$:

$$U(tx+(1-t)y) \geq tU(x)+(1-t)U(y)\,; \qquad (1.26)$$

– ***строго вогнутой***, *если для любых* x, $y \in X$ $(x \neq y)$ *и любого* $t \in (0;1)$:

$$U(tx+(1-t)y) > tU(x)+(1-t)U(y)\,. \qquad (1.27)$$

Замечание. 1.19. Очевидно, что из *строгой квазивогнутости* следует *квазивогнутость*, а из *вогнутости* (*строгой вогнутости*) следует *квазивогнутость* (соответственно *строгая квазивогнутость*).

Теорема 1.11. *Функция полезности* $U(x)$, *заданная на выпуклом множестве* X, *является квазивогнутой тогда и только тогда, когда порождаемое ей по закону* (1.21) *отношение предпочтения* $\succeq$ *выпукло.*

Доказательство. Пусть $U(x)$ квазивогнута, тогда для любых x, y, $z \in X$ таких, что $x \succeq z$ и $y \succeq z$ и любого $t \in [0;1]$

$$U(tx+(1-t)y) \geq \min\{U(x);U(y)\}.$$

Так как $x \succeq z$ и $y \succeq z$, то $U(x) \geq U(z)$ и $U(y) \geq U(z)$, следовательно,

$$\min\{U(x);U(y)\} \geq U(z).$$

Поэтому

$$U(tx+(1-t)y) \geq U(z).$$

Что равносильно

$$tx+(1-t)y \succeq z.$$

А это говорит о том, что, предпочтение выпукло.

Пусть теперь предпочтение $\succeq$, задаваемое функцией полезности $U(x)$ выпукло и x, $y \in X$. Для определённости будем считать, что $U(x) \geq U(y)$ (то есть $x \succeq y$). Тогда на основании выпуклости предпочтения имеем

$$tx+(1-t)y \succeq y$$

$$U(tx+(1-t)y) \geq U(y) = \min\{U(x);U(y)\}.$$

Следовательно, функция $U(x)$ квазивогнута. ■

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 1.12. *Функция полезности* $U(x)$, *заданная на выпуклом множестве* X, *является строго квазивогнутой тогда и только тогда, когда порождаемое ей по закону* (1.21) *отношение предпочтения* $\succeq$ *строго выпукло.*

Пример 1.3. Рассмотрим несколько важных типов функций полезности.

1) ***Линейная функция полезности***

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i;\ (A_i \geq 0). \qquad (1.28)$$

Линейная функция задаёт предпочтение с полным замещением благ. Это предпочтение является непрерывным, монотонным и выпуклым.

2) ***Функция Леонтьева***

$$U(x)=\min\left\{\frac{x_1}{a_1};\ldots;\frac{x_n}{a_n}\right\},\ (a_i>0;\ i=1,\cdots n). \qquad (1.29)$$

Функция Леонтьева задаёт идеальное дополнение между благами. Это означает, что для повышения потребительской полезности все блага должны увеличиваться совместно. Функция представляет предпочтение, которое также является непрерывным, монотонным и выпуклым.

3) ***Функция Кобба-Дугласа*** (*мультипликативная функция полезности*)

$$U(x)=Ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\,(A,\alpha_i>0;\ i=1,\cdots n). \qquad (1.30)$$

Функция Кобба-Дугласа представляет предпочтение, которое является непрерывным, монотонным и выпуклым на положительном ортанте $\mathbb{R}^n_{++}=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x\gg 0\}$.

1.2.2. Неоклассическая функции полезности

Определение 1.14. *Функция $U(x)$, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, называется* ***неоклассической функцией полезности****, если она удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам) для любых $x\in\mathbb{R}^n_{++}$:*

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x)>0,\ldots,\frac{\partial U}{\partial x_n}(x)>0; \qquad (1.31)$$

$$\lim_{x_1\to 0}\frac{\partial U}{\partial x_1}(x)=+\infty,\ldots,\ \lim_{x_n\to 0}\frac{\partial U}{\partial x_n}(x)=+\infty; \qquad (1.32)$$

$$\lim_{x_1\to +\infty}\frac{\partial U}{\partial x_1}(x)=0,\ldots,\ \lim_{x_n\to +\infty}\frac{\partial U}{\partial x_n}(x)=0; \qquad (1.33)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x)<0,\ldots,\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}(x)<0. \qquad (1.34)$$

Замечание 1.19. Величина $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ называется ***предельной полезностью*** *i-того блага*. В терминах предельной полезности условия (1.31)–(1.34) означают, что у неоклассической функции предельная полезность $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ является положительной, убывающей по этому благу функцией, имеющей вертикальную и горизонтальную асимптоты.

Замечание 1.20. Равенства (1.34) называется ***первым законом Госсена*** или ***законом об убывающей предельной полезности***. Его часто заменяют на более сильное условие

$$x^T H x < 0 \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \tag{1.35}$$

накладываемое на матрицу Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

и означающее её отрицательную определённость, что в свою очередь влечёт *строгую вогнутость* функции полезности $U(x)$.

Выясним, какие из приведенных выше функций полезности являются *неоклассическими?*

1) *Линейная функция полезности* не является неоклассической. Действительно, дифференцируя соотношения

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i, \tag{1.37}$$

получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = A_i; \ \ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = 0. \tag{1.38}$$

2) Рассмотрим обобщение линейной функции — ***функцию полезности с полным взаимозамещением благ***:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^{\alpha_i}. \tag{1.39}$$

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \alpha_i A_i x_i^{\alpha_i - 1}, \tag{1.40}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \alpha_i(\alpha_i - 1) A_i x_i^{\alpha_i - 2}. \tag{1.41}$$

Отсюда получаем, что функция полезности с полным взаимозамещением благ будет неоклассической тогда и только, когда:

$$0 < \alpha_i < 1. \tag{1.42}$$

3) *Функция Леонтьева*

$$U(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}; \ldots; \frac{x_n}{a_n}\right\}$$

не является неоклассической, так как у неё не существуют частные производные в точках, принадлежащих прямой

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}.$$

В случае *функции Кобба-Дугласа*

$$U(x) = A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = A\alpha_i x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 1} \cdots x_n^{\alpha_n};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = A\alpha_i(\alpha_i - 1) x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Анализ этих соотношений приходит нас к выводу: для того чтобы функция Кобба Дугласа была неоклассической, необходимо и достаточно выполнения условий.

$$0 < \alpha_i < 1.$$

1.3. Предельный анализ и эластичность

Одним из важных преимуществ функции полезности в исследовании потребительских предпочтений является возможность использования мощного аппарата математического анализа. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что функции полезности $U(x_1,\ldots,x_n)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема. Остановимся на основных экономико-математических характеристиках функции полезности.

1.3.1. Средняя полезность блага

Определение 1.15. *Величина*

$$u_i = \frac{U}{x_i}$$

называется ***средней полезностью i-го блага*** *функции полезности* $U(x_1,\ldots,x_n)$.

Средняя полезность u_i показывает величину полезности на единицу приобретенного i-того блага, а *предельная полезность* $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, как это следует из приближенного равенства

$$\Delta x_i \to 0 \ \frac{\partial U}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x_i},$$

показывает приближенно (а в пределе точно) величину дополнительной полезности на единицу дополнительно приобретенного i-го блага.

Замечание 1.21. У *функции Кобба-Дугласа*

$$U(x) = A{x_1}^{\alpha_1} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$$

средняя полезность пропорциональна предельной. Действительно,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = A\alpha_i {x_1}^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 1} \cdots {x_n}^{\alpha_n};$$

$$u_i = A{x_1}^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 1} \cdots {x_n}^{\alpha_n}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \alpha_i u_i.$$

1.3.2. Эластичность функции полезности и однородность

Определение 1.16. *Величина*

$$\varepsilon_i(U) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{U} \tag{1.43}$$

*называется **эластичностью (частной эластичностью) функции** $U(x_1,\ldots,x_n)$ **по i-му аргументу**, а*

$$E(U) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(U) \tag{1.44}$$

— полной эластичностью функции U.

Эластичность характеризует относительное изменение функции. Она, в силу приближенного равенства

$$\varepsilon_i(U) \approx \frac{\frac{\Delta U}{U}100\%}{\frac{\Delta x_i}{x_i}100\%},$$

показывает приближенно на сколько процентов изменится функция U при изменении на один процент i-того аргумента.

Замечание 1.22. Из Определения 1.16 вытекает, что *эластичность* $\varepsilon_i(U)$ функции полезности есть отношение предельной полезности к средней полезности.

Замечание 1.23. У функции Кобба-Дугласа

$$U(x) = Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

все частичные эластичности являются константами

$$\varepsilon_i(U) = \alpha_i.$$

Справедливо и обратное: если все частичные эластичности постоянны, то функция является функцией Кобба-Дугласа.

Определение 1.17. *Функция* $U(x_1,\ldots,x_n)$ *называются **однородной** степени* μ, *если для любого* $t > 0$

$$U(tx_1, tx_2 \ldots, tx_n) = t^{\mu} U(x_1, x_2 \ldots, x_n). \tag{1.45}$$

Если $\mu = 1$, *то функцию называют **линейно-однородной.***

Многие используемые функции полезности являются *однородными*. Так, функция Леонтьева $U(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1};\ldots;\frac{x_n}{a_n}\right\}$ является линейно-однородной, а функция Кобба-Дугласа

$$U(x) = Ax_1^{\alpha 1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

имеет степень однородности $\mu = \sum_i \alpha_i$.

Отношение предпочтение, задаваемое однородной функцией называется ***гомотетическим***. Поверхности безразличия *гомотечического* предпочтения переходят друг в друга при гомотетии с центром в начале координат.

Теорема 1.13. *Пусть $U(x_1,\ldots,x_n)$ — однородная функция степени μ, тогда имеют место соотношения*

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}x_n = \mu U(x_1,\ldots,x_n) \qquad (1.46)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \mu(\mu-1)U(x_1,\ldots,x_n). \qquad (1.47)$$

Доказательство. Продифференцируем дважды равенство (1.45) по t, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}x_n = \mu t^{\mu-1}U; \qquad (1.48)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \mu(\mu-1)t^{\mu-2}U(x_1,\ldots,x_n). \qquad (1.49)$$

Полагая в этих равенствах $t=1$, получаем соответственно (1.46) и (1.47). ■

Замечание 1.24. Равенство (1.46) носит название ***формулы Эйлера*** и является не только необходимыми, но и достаточным условием для того, чтобы функция U была однородной степени μ.

Следствие 1.1. *Полная эластичность однородной функции U равна степени однородности.*

Доказательство. Разделив обе части (1.46) на U, получим

$$\varepsilon_1(U) + \cdots + \varepsilon_n(U) = \mu . \qquad (1.50)$$

А, следовательно,

$$E(U) = \mu. \blacksquare$$

1.3.3. Предельная норма замещения

Поверхность безразличия в терминах функции полезности это множество в $\mathbb{R}_+^n$, определяемое условием

$$U(x_1,\dots,x_n)=U_0;$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\mathrm{d}x_{n.}=0. \qquad (1.51)$$

Зафиксируем в уравнении (1.51) все переменные, за исключением x_i и x_j. Тем самым мы зададим неявную функцию $x_j = f_i(x_i)$. С учётом фиксации переменных соотношения (1.51) примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j+\frac{\partial U}{\partial x_i}\mathrm{d}x_{i.}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_i}=-\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}}. \qquad (1.52)$$

Определение 1.18. *Величина*

$$S_{ij}=\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}} \qquad (1.53)$$

*называется **предельной нормой замещения** i-того блага j-тым благом.*

Предельная норма замещения S_{ij} показывает приближённо на сколько единиц необходимо увеличить j-ое благо при уменьшении на одну единицу i-го блага для того, чтобы полезность осталась на прежнем уровне.

Так для функции Кобба-Дугласа $U(x)=Ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$

$$S_{ij}=\frac{\alpha_i x_j}{\alpha_j x_i};$$

а для линейной функции $U(x)=\sum_{i=1}^{n} A_i x_i$

$$S_{ij}=\frac{A_i}{A_j}.$$

Замечание 1.25. С геометрической точки зрения, как это вытекает из (1.53), предельная норма замещения S_{ij} равна с противоположным знаком тангенсу угла наклона к графику функции $x_j = f_i(x_i)$.

Замечание 1.26. Пусть $U(x)$ — неоклассическая функция полезности. Непосредственной проверкой легко убедится в справедливости следующих соотношений:

$$S_{ij} > 0; \tag{1.54}$$

$$S_{ij}\,S_{jk} = S_{ik}; \tag{1.55}$$

$$(S_{ij})^{-1} = S_{ji}. \tag{1.56}$$

Замечание 1.27. Предельная норма замещения инвариантна относительно выбора функции полезности U, представляющей предпочтение $\succeq$. Действительно, пусть $\bar{U}=f(U)$ — другая функции полезности U, представляющей предпочтение $\succeq$, тогда на основании правила дифференцирования сложной функции получаем

$$\bar{S}_{ij}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_j}}=S_{ij}.$$

1.4. Бюджетное множество

В данном разделе нам предстоит ответить на *второй вопрос потребителя* и выяснить, *что для него доступно*. В реальности потребителю доступно не всё потребительское множество X, а только лишь его некоторое (весьма небольшое) подмножество. Дело в том, что помимо ограничений физического характера, для потребителя существует и экономическое ограничение, называемое *бюджетным*. Оно ограничивает расходы потребителя его доходом.

Пусть $p=(p_1,\dots,p_n)$ – вектор цен (где p_i (>0) — цена единицы i-го блага), а $I>0$ — бюджет (доход) потребителя. Тогда бюджетное ограничение имеет вид:

$$x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n\le I \tag{1.57}$$

Или в матричной форме

$$p^Tx\le I\ ; \tag{1.58}$$

где $p^T=(p_1,\cdots,p_n)$ — вектор-строка, а $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ — вектор-столбец.

Определение 1.19. *Множество*

$$B(p,I)=\{x\in R_+^n;\ p^Tx\le I\}$$

наборов благ, удовлетворяющих бюджетному ограничению, называют ***бюджетным множеством.***

При этом множество

$$b(p,I)=\{x\in R_+^n;\ p^Tx=I\}$$

называется ***бюджетной границей (бюджетной линией*** *в случае $n=2$).*

Теорема 1.14. *Бюджетное множество $B(p,I)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло.*

Доказательство.

1) $B(p,I)$ непусто, так как ему принадлежит, например, набор $x=\left(I/p_1,0,\cdots,0\right)$. В этом легко убедиться, подставив координаты вектора в бюджетное ограничение (1.57).

2) Докажем *ограниченность*. Пусть

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in B(p,I).$$

Тогда из (1.57) следует

$$x_1\le\frac{I}{p_1}-\frac{x_2p_2+\ldots+x_np_n}{p_1}. \tag{1.59}$$

Учитывая, что $x_i\ge 0$ и $p_i>0$ $(i=1,\dots,n)$, из (1.59) получаем

$$0\le x_1\le\frac{I}{p_1}.$$

Подобным образом получаются аналогичные неравенства для остальных координат вектора x:

$$0 \le x_i \le \frac{I}{p_i}; \ (i = 1, \dots, n). \tag{1.60}$$

Следовательно, $B(p,I)$ — ограничено.

3) Докажем *замкнутость*. Бюджетное множество замкнуто как пересечение замкнутых множеств (полупространств).

4) Докажем *выпуклость*. Пусть $x, y \in B(p,I)$ и $t \in [0;1]$. Покажем, что

$$tx + (1-t)y \in B(p,I).$$

Имеем

$$p^T(\alpha x + (1-\alpha)y) = tp^T x + (1-t)p^T y \le tI + (1-t)I = I.$$

Следовательно, $B(p,I)$ — выпукло. ■

Подобным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.15. *Бюджетная граница $b(p,I)$ является непустым ограниченным замкнутым выпуклым множеством.*

Следующее утверждение описывает характер изменений бюджетного множества $B(p,I)$ при изменении бюджета потребителя или вектора цен.

Теорема 1.16. *Имеют место соотношения*:

$$B(tp,tI) = B(p,I); \ \forall t > 0; \tag{1.61}$$

$$I \ge I \Rightarrow B(p,I) \subset B(p,I); \tag{1.62}$$

$$p \ge p \Rightarrow B(p,I) \subset B(p,I). \tag{1.63}$$

Доказательство.

1) Докажем (1.61). Имеем

$$x \in B(p,I) \Leftrightarrow \begin{cases} p^T x \le I \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (tp)^T x \le tI; \ \forall t > 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in B(tp,tI).$$

2) Убедимся в справедливости (1.62). Пусть $I \ge I$, тогда

$$x \in B(p,I) \Rightarrow p^T x \le I \le I \Rightarrow x \in B(p,I).$$

Докажем теперь (1.63). Пусть $x \in B(p,I)$ и $p \ge p$, тогда

$$p^T x \le p^T x \le I.$$

Следовательно, $x \in B(p,I)$. ■

1.5. Оптимизационная модель потребительского выбора

В этом разделе мы дадим ответ на *третий вопрос потребителя*: *что из доступного самое желаемое*?

Пусть $I > 0$ — бюджет (доход) потребителя, а $p = (p_1, \ldots, p_n) \gg 0$ – вектор цен. Предполагая, что потребитель действует рационально, то есть стремится максимизировать полезность приобретаемого набора благ $x = (x_1, \ldots, x_n)$, не превышая при этом свой бюджет, мы приходим к ***задачи потребителя***:

$$U(x_1, \ldots, x_n) \to \max. \tag{1.64}$$

при условии:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \le I; \tag{1.65}$$

$$x_i \ge 0;\ (i = 1, \cdots, n). \tag{1.66}$$

Определение 1.20. *Набор благ* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, *являющийся решением задачи потребителя* **(1.64) — (1.66)**, *называется* ***оптимальным набором потребления*** *или* ***точкой спроса***.

Замечание 1.28. В терминах предпочтения, порождаемого функцией полезности, *оптимальный набор* потребления есть ни что иное как точка насыщения этого предпочтения на бюджетном множестве.

Теорема 1.17. *Пусть* $U(x_1, \ldots, x_n)$ — *непрерывная строго квазивогнутая функции полезности, тогда решение задачи потребителя существует и единственно.*

Доказательство. Так как функция $U(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывна, а бюджетное множество $B(p, I)$ непусто, замкнуто и ограничено, то на основании теоремы Вейерштрасса существует наибольшее значение функции $U(x_1, \ldots, x_n)$ но этом множестве, то есть решение задачи потребителя *существует*.

Далее, поскольку $U(x_1, \ldots, x_n)$ — строго квазивогнута, то порождаемое ею предпочтение строго выпукло. Принимая во внимание, что бюджетное множество выпукло, то на основании Теоремы 1.7 приходим к выводу, что оптимальный набор *единственен*. ■

Замечание 1.29. Если функция полезности задаёт локально ненасыщаемое предпочтение, то в силу Теоремы 1.4 оптимальный набор потребления принадлежит границе. Более того, если задаваемое предпочтение будет монотонным (так будет, например, в случае неоклассической функции), оптимальный набор будет принадлежать бюджетной границе, то есть удовлетворять условию:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = I. \tag{1.67}$$

Это означает, что потребитель потратит весь свой бюджет. Действительно, если бы потребитель потратил не весь бюджет, то оставшуюся сумму он бы мог потратить на приобретение дополнительного количества благ и, тем самым, увеличить полезность. Поэтому вместо бюджетного ограничения (1.65) можно, не ограничивая общности, рассматривать бюджетное ограничение (1.67). Кроме того, можно считать, что $x \gg 0$, то есть, что потребитель приобретает все виды товаров (в противном случае можно уменьшить размерность $\mathbb{R}^n_+$).

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что предпочтение потребителя задано при помощи неоклассической функции полезности $U(x_1,\ldots,x_n)$ с отрицательно определённой матрицей Гессе. В этих предположениях задача потребителя является задачей выпуклого программирования. Её решение сводится к нахождению точки максимума (x^*,λ^*) функции Лагранжа

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = U(x_1,\ldots,x_n) - \lambda(x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n - I). \tag{1.68}$$

На основании теоремы Куна-Такера, необходимые и достаточные условия для оптимального набора потребления имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*) - \lambda^* p_1 = 0; \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = \dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*) - \lambda^* p_n = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*) = -(x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n - I) = 0; \\ x_i^* \gg 0. \end{cases} \tag{1.69}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*) = \lambda^* p_1; \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*) = \lambda^* p_n. \end{cases} \tag{1.70}$$

$$x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n = I. \tag{1.71}$$

$$x_i^* > 0. \tag{1.72}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial U}{\partial p_n} \end{pmatrix},\ p^T = (p_1, \ldots, p_n),\ x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}.$$

то соотношения (1.71)–(1.72) можно записать в компактной матичной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x^*) = \lambda^* p^T; \tag{1.73}$$

$$p^T x^* = I; \tag{1.74}$$

$$x^* \gg 0. \tag{1.75}$$

Условимся всюду в дальнейшем вектор благ x^* и вектор цен p считать векторами-столбцами, а градиент функции — вектором-строкой.

Итак, доказана

Теорема 1.18. *Пусть $U(x_1, \ldots, x_n)$ — строго вогнутая неоклассической функции полезности. Для того чтобы набор благ $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ был оптимальным набором потребителя необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям* (1.70) — (1.72) *при некотором* λ^*.

Замечание 1.30. Принимая во внимание то, что предельные полезности и цены всех благ положительны, из (1.70) следует, что

$$\lambda^* > 0. \tag{1.76}$$

Если выразить λ^* из уравнений (1.70), то получим

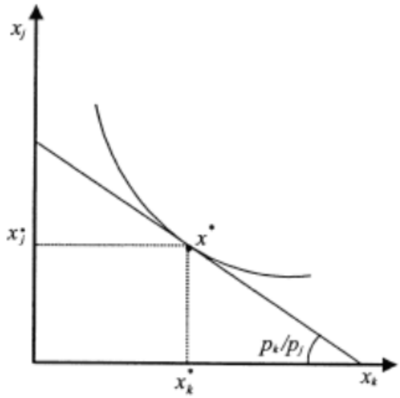
$$\begin{cases} \lambda^* = \dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)}{p_1}; \\ \vdots \\ \lambda^* = \dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*)}{p_n}. \end{cases};$$

Следовательно,

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)}{p_1} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*)}{p_n}. \qquad (1.77)$$

Следствие 1.2. (второй закон Госсена). *Пусть* $U(x_1,\ldots,x_n)$ *— строго вогнутая неоклассической функции полезности. Набор благ* $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ *является оптимальным набором потребителя тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям* (1.71), (1.72), (1.77).

Замечание 1.31. Соотношения (1.71), (1.72), (1.77) показывают, что с геометрической точки зрения нахождение оптимального набора потребителя равносильно отысканию точки, в которой поверхность безразличия касается бюджетного множества.



С экономической точки зрения равенства (1.77) означают, что в оптимальном наборе отношение предельной полезности блага к его цене одинаково для всех видов благ (и равно λ^*, это проясняет смысл вспомогательной переменной λ). Если бы (1.77) не имели места, то потребитель имел бы возможность увеличить полезность путём перераспределения бюджета в пользу блага, имеющего наибольшее отношения предельной полезности к цене.

Замечание 1.32. Равенства (1.77) могут быть записаны в эквивалентной форме, как

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x^*)}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}(x^*)} = \frac{p_i}{p_j}.$$

То есть

$$S_{ij}(x^*) = \frac{p_i}{p_j}.$$

Пример 1.4. Найти оптимальный набор потребителя с бюджетом $I = 1000$ и функцией полезности $U = 2\ln x_1 + 3\ln x_2$ при ценах $p_1 = 5$ и $p_2 = 4$.

Решение. Мы имеем следующую задачу потребителя

$$\begin{cases} U = 2\ln x_1 + 3\ln x_2 \to \max \\ 5x_1 + 4x_2 = 1000; \\ x_1 > 0; \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

Вычислив частные производные первого и второго порядка,

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1}; \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{3}{x_2}.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} = -\frac{2}{{x_1}^2}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} = -\frac{3}{{x_2}^2}$$

нетрудно убедится, что данная функция полезности является неоклассической. Кроме того, матрица Гессе

$$H = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{(x_1)^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{(x_2)^2} \end{pmatrix}$$

на основании критерия Сильвестра является отрицательно определённой:

$$\Delta_1 = -\frac{2}{(x_1)^2} < 0; \ \Delta_2 = \frac{6}{(x_1)^2 (x_2)^2} > 0.$$

Следовательно, U — строго вогнута. На основании второго закона Госсена (1.71), (1.72), (1.77) имеем:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1000; \\ \dfrac{2}{5x_1} = \dfrac{3}{4x_2}; \\ x_1 > 0; \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим оптимальный план потребления исходной задачи

$$\begin{cases} x_1^* = 80; \\ x_2^* = 150. \end{cases}$$

Следствие 1.3. *Пусть для i-того блага выполняются условие*

$$\varepsilon_i(U) = \sigma E(U); \tag{1.78}$$

где σ *— некоторая постоянная, тогда*

$$p_i x_i^* = \sigma I; \tag{1.79}$$

то есть σ *— это часть бюджета, которую потребитель потратит на покупку i-го блага.*

Доказательство. В силу (1.43), (1.44) соотношения (1.78) принимают вид:

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i} x_i}{U} = \sigma \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \dfrac{\partial U}{\partial x_n} x_n}{U}$$

Из этих соотношений в силу (1.70) следует, что

$$\lambda^* p_i x_i^* = \sigma\lambda^*(x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n).$$

Сокращая на λ^* и учитывая бюджетное ограничение (1.71), получаем (1.79).

Замечание 1.33. Условия Следствия 1.3 выполнены, если U — однородная функция степени μ, у которой эластичность по i-тому благу постоянна. В этом случае соотношения (1.79) принимают вид:

$$p_i x_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\mu} I. \tag{1.80}$$

В частности, если U — функция полезности Кобба-Дугласа, то соотношения (1.80) имеют место для любого блага, при этом $\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ и $\varepsilon_i = \alpha_i$, следовательно,

$$p_i x_i^* = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} I. \tag{1.81}$$

Пример 1.5. Найти оптимальный набор потребителя с бюджетом $I = 2000$ и функцией полезности $U = x_1^{0.5} x_2^{0,3}$ при ценах $p_1 = 2$ и $p_2 = 10$.

Решение. Имеем $\alpha_1 = 0,5; \alpha_2 = 0,3$, $\mu = 0,8$. Подставляя данные нашей задачи в (1.82), получаем

$$\begin{cases} 2x_1^* = \dfrac{0,5}{0,8} 2000; \\ 10x_2^* = \dfrac{0,3}{0,8} 2000. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1^* = 625; \\ x_2^* = 75. \end{cases}$$

Замечание 1.34. Соотношения (1.78) инвариантны относительно преобразования монотонного преобразования вида $\widehat{U} = f(U)$. Следовательно, равенства (1.81) справедливы для всех функций полезности вида $\widehat{U} = f(U)$, где U — функция

Кобба-Дугласа. Так как функция полезности из Примера 1.4 может быть записана как $U = \ln(x_1^{\,2} x_2^{\,3})$, то нахождение оптимального набора можно получит более простым способом, применив формулы (1.81). А именно:

$$\begin{cases} 5x_1^{\,*} = \dfrac{2}{5}1000; \\ 4x_2^{\,*} = \dfrac{3}{5}1000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{\,*} = 80; \\ x_2^{\,*} = 150. \end{cases}$$

1.6. Функции спроса и их свойства

1.6.1. Функции спроса и однородность

Оптимальный набор потребителя $x^* = \left(x_1^{\,*},\ldots,x_n^{\,*}\right)$ и значение λ^* зависят от цен на блага и бюджета потребителя. Другими словами, они являются функциями от p_i и I:

$$x_i^{\,*} = D_i\left(p_1,\ldots,p_n,I\right); \tag{1.82}$$

$$\lambda^* = \Lambda\left(p_1,\ldots,p_n,I\right). \tag{1.83}$$

Функция $x_i^{\,*}(p,I)$ называется ***функцией спроса на i-ое благо***, а вектор $x^*(p,I)$ — ***вектором спроса***.

Из формул (1.81) легко найти функции спроса для функции полезности Кобба-Дугласа

$$x_i^{\,*}\left(p_1,\ldots,p_n,I\right) = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}\frac{I}{p_i}. \tag{1.84}$$

Из этих соотношений видно, что значение $x_i^{\,*}$ не меняется при пропорциональном увеличении цен и бюджета. Подобное свойство имеет место и в общем случае.

Теорема 1.19. *Функции $x_i^{\,*} = D_i(p,I)$ и $\lambda^* = \Lambda(p,I)$ являются однородными функциями соответственно нулевой и минус первой степени, то есть для любого $\forall\, t > 0$*

$$D_i\left(tp_1,\ldots,tp_n,tI\right) = D_i\left(p_1,\ldots,p_n,I\right); \tag{1.85}$$

$$\Lambda\left(tp_1,\ldots,tp_n,tI\right)=t^{-1}\Lambda\left(p_1,\ldots,p_n,I\right). \tag{1.86}$$

Доказательство. Пусть (x^*,λ^*) — решение системы (1.73) — (1.75), соответствующее ценам p и бюджету I. Непосредственной проверкой нетрудно убедится, что при любом $t>0$ пара $(x^*,t^{-1}\lambda)$ является решением этой системы, соответствующее ценам tp и бюджету tI. Это доказывает Теорему 1.19.

Замечание 1.35. Уравнения (1.85) означают, что функции спроса не зависят от масштаба цен, то есть от выбора единицы измерения.

Замечание 1.36. Соотношения (1.82) с учётом (1.85) могут быть записаны в виде:

$$x_i^*=d_i\left(q_1,\ldots,q_n\right), \tag{1.87}$$

где $q_i=\dfrac{p_i}{I}$ – относительные цены, а

$$d_i\left(q_1,\ldots,q_n\right)=D_i\left(\frac{p_1}{I},\ldots,\frac{p_n}{I},1\right). \tag{1.88}$$

Так, например, для функции полезности Кобба-Дугласа

$$x_i^*\left(q_1,\ldots,q_n\right)=\frac{\alpha_i}{q_i\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}. \tag{1.89}$$

Замечание 1.37. Уравнения (1.70), (1.71), записанные в относительных ценах имеют вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)=l^*q_1;\\ \vdots\\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*)=l^*q_n.\end{cases} \tag{1.90}$$

$$x_1^*q_1+x_2^*q_2+\ldots+x_n^*q_n=1, \tag{1.91}$$

где

$$l^*=I\lambda^*. \tag{1.92}$$

Или в матричной форме

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x^*) = l^* q \;; \tag{1.93}$$

$$qx^* = 1 \,. \tag{1.94}$$

Теорема 1.20. *Если $U(x_1,\ldots,x_n)$ — однородная степени μ функции полезности, то функции $x_i^* = d_i(q,I)$ и $l^* = l(q,I)$ также являются однородными соответственно степени минус один и $(-\mu)$, то есть для любого $t > 0$*

$$d_i(tq_1,\ldots,tq_n) = t^{-1} d_i(q_1,\ldots,q_n)\,, \tag{1.95}$$

$$l(tq_1,\ldots,tq_n) = t^{\mu} l(q_1,\ldots,q_n)\,. \tag{1.96}$$

Доказательство. Пусть (x^*, l^*) — положительное решение системы (1.93), (1.94), соответствующее ценам q. Покажем, что любого $t > 0$ пара $(t^{-1}x^*, t^{-\mu}l^*)$ является положительным решением этой системы, соответствующее ценам tq. Справедливость данного утверждения для уравнения (1.94) очевидна, для уравнения (1.93) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x}(t^{-1}x^*) = (t^{-\mu} l^*)(tq)\,. \tag{1.97}$$

Так как U — однородная функция степени μ, то $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ имеет степень однородности ($\mu - 1$), поэтому из (1.96) получаем

$$t^{1-\mu}\frac{\partial U}{\partial x}(x^*) = t^{1-\mu} l^* q\,.$$

Что равносильно (1.94). Следовательно, $(t^{-1}x^*, t^{-\mu}l^*)$ является решением системы (1.93), (1.94). ■

1.6.2. Реакция потребителя на изменения бюджета

Соотношения (1.85) описывает реакцию потребителя при одновременном пропорциональном изменении цены и бюджета. Чтобы охарактеризовать эту реакцию в общем случае, необходимо исследовать частные производные функций спроса. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что функция полезности является неоклассической с отрицательно определённой матрицей Гессе.

Исследуем сначала влияние бюджета на потребительский спрос. Продифференцируем уравнения (1.70), (1.71) по I имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k{}^*}{\partial I} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial I} \cdot p_j\,; \qquad (1.98)$$

$$\frac{\partial x_1{}^*}{\partial I} p_1 + \ldots + \frac{\partial x_n{}^*}{\partial I} p_n = 1 \qquad (1.99)$$

Или в матричной форме

$$H \frac{\partial x^*}{\partial I} - p \frac{\partial \lambda^*}{\partial I} = 0\,; \qquad (1.100)$$

$$p^T \frac{\partial x^*}{\partial I} = 1\,. \qquad (1.101)$$

где

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1{}^*}{\partial I} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n{}^*}{\partial I} \end{pmatrix}.$$

Уравнения (1.100), (1.101) могут быть также записаны в блочно–матричном виде как

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.102)$$

Замечание 1.38. Так как матрица Гессе H отрицательно определена и поэтому невырождена, то невырожденна и матрица

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & H \end{pmatrix}. \qquad (1.103)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что обратной к ней является матрица

$$\tilde{H}^{-1} = \begin{pmatrix} h & h \cdot p^T H^{-1} \\ h \cdot H^{-1} p & h \cdot (H^{-1} p)(p^T H^{-1}) + H^{-1} \end{pmatrix}; \qquad (1.104)$$

где

$$h = -(p^T H^{-1} p)^{-1}. \qquad (1.105)$$

Решая матричное уравнение (1.102), находим

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & h \cdot p^T H^{-1} \\ h \cdot H^{-1} p & h \cdot (H^{-1} p)(p^T H^{-1}) + H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (1.106)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial I} = -h \, ; \qquad (1.107)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} = -h \cdot H^{-1} p \, . \qquad (1.108)$$

Замечание 1.39. В силу отрицательной определённости матрицы Гессе из (1.105) вытекает, что

$$h > 0. \qquad (1.109)$$

Принимая это во внимание, из (1.107) получаем

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial I} < 0 \, . \qquad (1.110)$$

Определение 1.21. *Благо называется* ***ценным****, если при увеличении бюджета спрос на него увеличивается, то есть.*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0 \qquad (1.111)$$

и ***малоценным*** *в противном случае.*

Теорема 1.21. *Существует хотя бы одно ценное благо.*

Доказательство. Предположим противное, что все блага являются малоценными, то есть

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} \le 0; \forall i$$

Тогда с учётом положительности цен получаем

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} p_1 + \ldots + \frac{\partial x_n^*}{\partial I} p_n \le 0 .$$

А это противоречит (1.99). ■

1.6.3. Реакция потребителя на изменение цен

Исследуем теперь влияние цен на потребительский выбор. Продифференцируем уравнения (1.70). (1.71) по p_i, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} \cdot p_j + \lambda^* \delta_{ij} ; \tag{1.112}$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} p_1 + \ldots + \frac{\partial x_n^*}{\partial p_i} p_n + x_i^* = 0 . \tag{1.113}$$

где δ_{ij} — компоненты единичной матрицы E (*символ Кронекера*):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j, \\ 0, \text{если } i \ne j. \end{cases}$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$p^T \frac{\partial x^*}{\partial p} = -\left(x^*\right)^T ; \tag{1.114}$$

$$H \frac{\partial x^*}{\partial p} - p \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = \lambda^* E ; \tag{1.115}$$

где

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

– матрица Якоби, а $\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}$. В матричной форме уравнения (1.114), (1.115) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{*T} \\ \lambda^* E \end{pmatrix}. \qquad (1.116)$$

Решая уравнение (1.116), получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & h \cdot p^T H^{-1} \\ h \cdot H^{-1} p & h \cdot (H^{-1} p)(p^T H^{-1}) + H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{*T} \\ \lambda^* E \end{pmatrix}. \qquad (1.117)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = h(x^*)^T + \lambda^* h(p^T H^{-1}). \qquad (1.118)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = h \cdot \left(H^{-1} p\right)(x^*)^T + \lambda^* h \cdot (H^{-1} p)(p^T H^{-1}) + \lambda^* H^{-1}. \qquad (1.119)$$

Замечание 1.40. Матричные уравнения (1.102) и (1.116) могут быть объединены в одно уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I} & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I} & \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x^{*T} \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix}; \qquad (1.120)$$

которое называют ***основным матричным уравнением*** теории потребления.

1.6.4. Компенсационный рост цены и уравнение Слуцкого

Определение 1.22. *Рост цены на благо, при котором величина функции полезности остается неизменной за счет соответствующего увеличения бюджета, называется* ***компенсационным.***

Компенсационные производные (то есть производные по переменной, по которой осуществляется компенсационный рост) обозначаются $\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{comp.}$ и $\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}\right)_{comp.}$.

С геометрической точки зрения компенсационный рост характеризуется тем, что бюджетная плоскость меняет своё положение, сохраняя касание к той же самой поверхности безразличия.

Лемма 1.1. *Имею место следующие соотношения*:

$$p\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = 0\ ; \tag{1.121}$$

$$\frac{\partial I}{\partial p} = (x^*)^T\ ; \tag{1.122}$$

$$H\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} - p^T\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} = \lambda^* E\ ; \tag{1.123}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp}^T H\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = \lambda^*\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp}^T \tag{1.124}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp}^T = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \tag{1.125}$$

где $\frac{\partial I}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial I}{\partial p_n} \end{pmatrix}$.

Доказательство.

1) Пусть осуществляется компенсационный рост на i-тое благо. Он характеризуется следующими условиями:

$$I = I(p_i)\ ; \tag{1.126}$$

$$U(x^*) = M = const\ . \tag{1.127}$$

Дифференцируя (1.127) по p_i, находим

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{comp.} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i}\right)_{comp.} = 0\ . \tag{1.128}$$

Принимая во внимание (1.70), получаем

$$\lambda^* \left(p_1 \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} \right)_{comp.} + \ldots + p_n \left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i} \right)_{comp.} \right) = 0 .$$

Сокращая на λ^*, мы приходим к координатной форме записи соотношений (1.121):

$$p_1 \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} \right)_{comp.} + \ldots + p_n \left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i} \right)_{comp.} = 0 . \qquad (1.129)$$

2) Продифференцируем теперь (1.70) по p_i с учётом (1.126), имеем

$$p_1 \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} \right)_{comp.} + \ldots + p_n \left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i} \right)_{comp.} + x_i^* = \frac{\partial I}{\partial p_i} .$$

Отсюда в силу (1.129) следует

$$\frac{\partial I}{\partial p_i} = x_i^* ; \qquad (1.130)$$

что доказывает справедливость (1.122)

3) Продифференцировав (1.70) по p_i, получаем координатную форму записи (1.123).

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} \right)_{comp} = \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} \right)_{comp} p_j + \lambda^* \delta_{ij} . \qquad (1.131)$$

4) Умножая (1.123) слева на $\left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)_{comp}^T$ и принимая во внимание (1.121), получаем (1.124).

5) Транспонируя (1.124) и учитывая симметричность матрицы Гессе ($H^T = H$), получаем (1.125). ■

Замечание 1.41. Подобно тому, как это делалось выше уравнения (1.121) и могут быть объединены в блочно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^T \\ -p & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} \right)_{comp} \\ \left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* E \end{pmatrix} . \qquad (1.132)$$

Отсюда, после стандартных рассуждений, получаем:

$$\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} = \lambda^* h(p^T H^{-1}); \tag{1.33}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = \lambda^* h \cdot (H^{-1} p)(p^T H^{-1}) + \lambda H^{-1}. \tag{1.34}$$

Теорема 1.22. *При компенсационном росте цены на i-тое благо спрос на это благо уменьшается, то есть*

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0\,. \tag{1.135}$$

Доказательство. Запишем соотношения (1.124) в координатной форме:

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_k} \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \left(\frac{\partial x_m^*}{\partial p_j}\right)_{comp} = \lambda^* \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp}. \tag{1.136}$$

Положим в (1.36) $j = i$, имеем

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_k} \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \left(\frac{\partial x_m^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = \lambda^* \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp}. \tag{1.137}$$

Так как матрица Гессе отрицательно определена, то левая часть равенства (1.37) меньше нуля. Учитывая, что $\lambda^* > 0$, получаем (1.135).

Определение 1.23. *Говорят, что i-ое и j-ое блага образуют **взаимодополнительную** пару, при компенсационном росте цены на i-ое благо спрос на j-ое благо падает, то есть*

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0\,, \tag{1.138}$$

Если же

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0\,, \tag{1.139}$$

*то блага называются **взаимозаменительными**.*

Замечание 1.42. Данное определение корректно, так как в силу (1.25)

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp}; \qquad (1.140)$$

а, следовательно, $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp}$ и $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp}$ имеют одинаковый знак.

Следствие 1.3. *Для любого блага существует хотя бы одно взаимозаменительное благо.*

Доказательство. Предположим противное: пусть для у i-того блага не существует ни одного взаимозаменительного блага, тогда

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \le 0;\ i \ne j$$

Тогда с учётом (1.135) и положительности всех цен, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0 .$$

А это противоречит (1.129). ■

Теорема 1.23. *Имеет место уравнение Слуцкого*

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp.} - \left(\frac{\partial x^*}{\partial I}\right)(x^*)^T . \qquad (1.141)$$

Доказательство. При компенсационном росте цены на i-тое благо бюджет есть функция от p_i, то есть. $I = I\left(p_i\right)$. Следовательно,

$$x_j^* = x_j^*(p_1, \cdots, p_n, I(p_i)) .$$

Дифференцируя эти соотношения по p_i, находим:

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp.} = \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial p_i} .$$

Отсюда, принимая во внимание (1.130), получаем

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp.} - \frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_i^* .$$

■

Первое слагаемое $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp.}$ в правой части *уравнения Слуцкого* называют ***эффектом замены***, а второе слагаемое $\left(-\frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_i^*\right)$ — ***эффектом дохода***.

Замечание 1.43. Уравнение Слуцкого может также получено из (1.134) на основании (1.108) и (1.119).

Следствие 1.4. *При повышении цены на ценное благо спрос на него уменьшается, то есть*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0 . \qquad (1.142)$$

Доказательство. Положим в (1.141) $i = j$, имеем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp.} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* . \qquad (1.143)$$

Так как благо ценное, то $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$. Принимая во внимание, что $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$ и $x_i^* > 0$, из (1.143) получаем (1.142). Следствие доказано.

1.6.5. Косвенная функция полезности и её свойства

Определение 1.24. *Функция*

$$U^*(p,I) = U(x^*(p,I)) \qquad (1.144)$$

называется ***косвенной функцией полезности***.

Пример 1.6. Найти косвенную функцию полезности для функции Кобба-Дугласа.

Решение. Имеем

$$U(x_1,\dots,x_n)=A\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$$

$$x_i^*=\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\frac{I}{p_i}$$

Отсюда

$$U^*(p_1,\dots,p_n,I)=A^*\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{I}{p_i}\right)^{\alpha_i}, \tag{1.145}$$

где $A^*=A\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\right)^{\alpha_i}$.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{\partial U^*}{\partial I}=\lambda^*. \tag{1.146}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial p}=-\lambda^*\left(x^*\right)^T. \tag{1.147}$$

Доказательство. Продифференцируем U^* по I, находим

$$\frac{\partial U^*}{\partial I}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial I}=\lambda^* p\frac{\partial x^*}{\partial I}.$$

Отсюда с учётом (1.101) получаем (1.146).

Аналогично имеем

$$\frac{\partial U^*}{\partial p}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial p}=\lambda^* p\frac{\partial x^*}{\partial p}.$$

Откуда в силу (1.112) следует (1.147). Лемма доказана.

Замечание 1.44. Равенство показывает, что λ^* есть ***предельная полезность бюджета (денег)***. Причём, так как $\frac{\partial \lambda^*}{\partial I} < 0$, то

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial I^2} < 0 . \qquad (1.148)$$

Следовательно, с ростом бюджета дополнительная полезность каждой следующей денежной единицы уменьшается.

Теорема 1.24. Косвенная функция полезности U^* является возрастающей функцией от бюджета и убывающей от цен на блага:

$$\frac{\partial U^*}{\partial I} > 0 ; \qquad (1.149)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} > 0 . \qquad (1.150)$$

Доказательство. Справедливость (1.149) и (1.150) вытекает соответственно из (1.147) и (1.148) с учётом того, что $\lambda^* > 0$ и $x^* > 0$.■

Теорема 1.24. *Косвенная функция полезности U^* является однородной функцией нулевой степени, то есть для любого $t > 0$*

$$U^*(tp_1,\ldots,tp_n,tI) = U^*(p_1,\ldots,p_n,I); \qquad (1.151)$$

Доказательство. Принимая во внимание нулевую однородность функции спроса x^*, имеем для любого $t > 0$

$$U^*(tp,tI) = U\left(x^*(tp,tI)\right) = U\left(x^*(p,I)\right) = U^*(p,I) . \blacksquare$$

Таким образом, косвенную функцию полезности можно, как и функции спроса, рассматривать как в номинальных, так и в относительных ценах. Так косвенная функция полезности для предпочтения Кооб-Дугласа в относительных ценах имеет вид:

$$U^*(q_1,\ldots,q_n) = A^* \prod_{i=1}^{n} q^{-\alpha_i} . \qquad (1.152)$$

Теорема 1.12. *Косвенная функция полезности* $U^*(q_1,\dots,q_n)$ *обладает следующими свойствами:*

1) *убывает по любому аргументу:*

$$\frac{\partial U^*}{\partial q} < 0\,; \tag{1.153}$$

2) *если функция полезности* $U(x_1,\dots,x_n)$ *является однородной степени* μ, то $U^*(q_1,\dots,q_n)$ *есть однородная функция степени* $(-\mu)$.

Доказательство. 1) Аналогично тому, как делалось выше при доказательстве Леммы 1.2, находим

$$\frac{\partial U^*}{\partial q} = -l^*\left(x^*\right)^T < 0\,. \tag{1.154}$$

Отсюда следует (1.153).

2) Принимая во внимания, что $x^*(q)$ имеет минус первую степень однородности, получаем

$$U^*(tq) = U\left(x^*(tq)\right) = U\left(t^{-1}x^*(q)\right) = t^{-\mu}U\left(x^*(q)\right) = t^{-\mu}U^*(q)\,. \ \blacksquare$$

Вопросы и упражнения

1. Дайте определение потребительского множества и перечислите условия, накладываемые на него

2. Перечислите аксиомы, которым удовлетворяет отношение предпочтения. Приведите пример отношения предпочтения, заданного на $\mathbb{R}^n_+$.

3. Как определяется отношение безразличия? Перечислите свойства отношения строгого предпочтения и отношения безразличия.

4. Дайте определение непрерывного предпочтения и перечислите его свойства. Приведите пример отношения предпочтения не являющегося непрерывным.

5. Сформулируйте аксиому локальной ненасыщаемости отношения предпочтения и дайте её экономическую трактовку. Каким свойством обладают линии безразличия локально ненасыщаемого предпочтения?

6. Дайте определение монотонного предпочтения и перечислите его свойства. Как связаны монотонное предпочтение и локально ненасыщаемое предпочтение?

7. Дайте определение выпуклого предпочтения и перечислите его свойства.

8. Дайте определение и приведите пример функции полезности, представляющей предпочтение.

9. Может ли функция полезности быть отрицательной? Однозначно ли определяется функция полезности для заданного предпочтения.

10. Дайте определение и приведите пример неоклассической функции полезности.

11. Сформулируйте первый закон Госсена.

12. Является ли линейная функция полезности неоклассической?

13. Будет ли сумма двух неоклассических функций полезности неоклассической функцией полезности?

14. Что такое предельная полезность? В чём ее экономический смысл? Может ли предельная полезность быть отрицательной?

15. Что такое средняя полезность? В чём ее экономический смысл? Может ли предельная полезность превышать среднюю полезность?

16. Дайте определение эластичности функции $U(x_1,\ldots,x_n)$ по i-му аргументу. Чему равны коэффициенты эластичности для функции Кобба-Дугласа?

17. Дайте определение полной эластичности функции. Как связана полная эластичность функции со степенью однородности?

18. Дайте определение однородной функции и докажите формулу Эйлера. Приведите пример однородной функции полезности.

19. Дайте определение поверхности безразличия. Найдите и изобразите графически линии безразличия для линейной функции, функции Леонтьева и функции Кобба-Дугласа.

20. Дайте определение предельной нормы замещения и объясните её геометрический и экономический смысл.

21. Что такое бюджетное множество? Какими сфойствами оно обладает?.

22. Сформулируйте задачу потребителя. Что называется оптимальным набором потребления? Может ли задача потребителя иметь несколько решений?

23. Дайте геометрическую интерпретацию решения задачи потребителя.

24. Сформулируйте второй закон Госсена и дайте его экономическую интерпретацию.

25. Найдите оптимальный набор потребителя с бюджетом $I = 5000$ и функцией полезности $U = x_1^{0.5} x_2^{0,3}$ при ценах $p_1 = 5$ и $p_2 = 20$.

26. Дайте определение функции спроса и сформулируйте её свойства.

27. Какое благо называется ценным? Как изменяется спрос на ценное благо при росте цены на это благо?

28. Что такое компенсационный рост цены на благо? Дайте геометрическую трактовку компенсационному росту цены на благо.

29. Как изменяется спрос на благо при компенсационном росте цены на это благо?

30. Запишите уравнение Слуцкого и охарактеризуйте экономический смысл, входящих в него слагаемых.

31. Какие блага называются взаимозаменительными (взаимодополнительными)?

32. Дайте определение косвенной функции полезности и перечислите её свойства.

33. Найти эластичности и предельные нормы замещения функции $U(x_1, x_2) = 2x_1^{0,4} x_2^{0,3}$.

34. Найти эластичности и предельные нормы замещения функции $U(x_1, x_2) = 5\ln x_1 + 4\ln x_2$.

35. Решить задачу потребителя, если $U(x_1, x_2) = 2\ln x_1 + 3\ln x_2$, цены на блага: $p_1 = 4$, $p_2 = 10$, бюджет $I = 2000$.

36. Найти функции спроса, если предпочтение задано функцией полезности $U(x_1, x_2) = 8x_1^{0,5} x_2^{0,3}$.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА

2.1. Пространство ресурсов и производственная функция

2.1.1. Определение производственной функции

Производством называется процесс изготовления какой-либо продукции. В процессе производства *производственными единицами* (фирмами, предприятиями, отраслями, странами) затрачиваются определённые *ресурсы* (*факторы производства*). К ним относятся: труд, капитал, сырье, энергия, земля.

Пусть в производстве используется n видов ресурсов в объёмах $x_1,\ldots,x_n$, а Q — количество выпускаемой продукции. Тогда с формальной точки зрения производство можно рассматривать как некоторую функцию $Q(x_1,\ldots,x_n)$, задающую соответствие между *вектором ресурсов* (*производственным планом*) $x=(x_1,\ldots,x_n)$, принадлежащему *пространству ресурсов* $\mathbb{R}_+^n$, и объёмом выпускаемой продукции Q. Эта функция должна удовлетворять естественным (с экономической точки зрения) условиям, которые мы сформулируем в следующем определении.

Определение 2.1. *Производственной функцией* называется непрерывная, определённая на $\mathbb{R}_+^n$ функция $Q(x)$, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

1) $Q(x) \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}_+^n$ (2.1)

2) $Q(0) = 0$; (2.2)

3) $x \geq y \Rightarrow Q(x) \geq Q(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^n$. (2.3)

Замечание 2.1. Условие (2.1) носит название аксиомы *неотрицательности выпуска*. Условие (2.2) говорит о том, что производство невозможно в отсутствии ресурсов. Условие (2.3) (*аксиома монотонности*) показывает, что $Q(x_1, \ldots, x_n)$ является неубывающей по любому из аргументов.

Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся типы производственных функций.

1) *Линейная производственная функция*

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i;\ \ (a_i > 0), \tag{2.4}$$

2) *Производственная функция Леонтьева* (*функция затраты-выпуск*)

$$U(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}; \ldots; \frac{x_n}{a_n}\right\};\ \ (a_i > 0) \tag{2.5}$$

3) *Производственная функция Кобба-Дугласа*

$$U(x) = A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ A,\ \alpha_i > 0\ (\forall i). \tag{2.6}$$

Замечание 2.2. Приведенные выше производственные функции уже встречались нам в теории потребления. Это не удивительно, так как производственную функцию можно считать функцией полезности производителя, выступающего как потребитель ресурсов. Полезностью в этом случае определяется количеством выпускаемой продукции.

Замечание 2.3. Наибольшее распространение получили так называемые двухфакторные производственные функции, то есть функции вида $Q(K, L)$, где K — величина затраченного капитала (основных фондов), а L– величина затраченного труда.

Замечание 2.4. Ресурс называется *существенным*, если в его отсутствии производство невозможно. Таковым ресурсом, например, является труд. Условие (2.2) часто усиливают требованием, чтобы все ресурсы были существенными. Данному требованию удовлетворяют функции Леонтьева и Кобба-Дугласа.

2.1.2. Экономико-математические характеристики производственной функции

Рассмотрим основные экономико-математические характеристики производственной функции, многие из которых уже нам знакомы и подробно изучены в теории потребления:

1) *Средняя производительность i-го ресурса*:

$$q_i = \frac{Q}{x_i}; \tag{2.7}$$

В частности,

$$q_L = \frac{Q}{L} \tag{2.8}$$

— *средняя производительность труда*;

$$q_K = \frac{Q}{K} \tag{2.9}$$

— *средняя фондоотдача*;

2) *Предельная производительность i-го ресурса*:

$$m_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i}; \tag{2.10}$$

В частности,

$$m_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \tag{2.11}$$

— *предельная производительность труда*;

$$m_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \tag{2.12}$$

— *предельная фондоотдача*;

3) *Эластичность по i-му ресурсу*:

$$\varepsilon_i(Q) = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{Q}; \tag{2.13}$$

4) *Полная эластичность*

$$E(Q) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(Q) \tag{2.14}$$

5) *Предельная норма замещения i-го ресурса j-тым ресурсом*:

$$S_{ij} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_j}} \tag{2.15}$$

6) *Фондовооруженность*

$$k = \frac{K}{L} \tag{2.16}$$

Поверхность уровня производственной функции называется ***изоквантой***. Роль *изоквант* в теории производства аналогична роли кривых безразличия в теории потребления.

2.1.3. Неоклассическая производственная функция

Определение 2.2. *Производственная функция* $Q(x_1,\ldots,x_n)$ *, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, называется* ***неоклассической****, если, наряду с условиями* (2.1) *и* (2.2), *она удовлетворяет следующим соотношениям (аксиомам) для любых* $x \in \mathbb{R}^n_{++}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) > 0, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x) > 0; \tag{2.17}$$

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) = +\infty, \ldots, \lim_{x_n \to 0} \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x) = +\infty; \tag{2.18}$$

$$\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) = 0, \ldots, \lim_{x_n \to +\infty} \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x) = 0; \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}(x) < 0, \ldots, \frac{\partial^2 Q}{\partial x_n^2}(x) < 0. \tag{2.20}$$

Замечание 2.5. Соотношения (2.17) — (2.20) в точности воспроизводят аксиомы неоклассической функции полезности, подробно изученные нами в теории потребления.

Замечание 2.6. Часто на неоклассическую производственную функцию дополнительно накладывают условие однородности:

$$Q(tx_1, tx_2 \dots, tx_n) = t^{\mu} Q(x_1, x_2 \dots, x_n).$$

Так как Q — неотрицательна, то из формулы Эйлера (1.46) в силу (2.17) следует, что $\mu > 0$. Степень однородности μ называют *коэффициентом отдачи от расширения масштаба производства*. При этом в случае, когда $0 < \mu < 1$ говорят об *убывающей отдаче*, при $\mu > 1$ — о *возрастающей отдаче*, а при $\mu = 1$ — о *постоянной отдаче*.

Приведём примеры неоклассических двухфакторных производственных функций.

1) *Производственная функция Кобба-Дугласа*:

$$Q(K; L) = AK^{\alpha} L^{\beta};\ (A, \alpha, \beta > 0), \tag{2.21}$$

является неоклассической при условии, что $\alpha < 1$ и $\beta < 1$.

2) *Производственная функция CES*:

$$Q(K, L) = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}} \tag{2.22}$$

Где $A > 0$; $\delta > 0$; $0 < \mu < 1$; $\rho > -1$.

3) *Производственная функция с полным взаимозамещением ресурсов*:

$$Q(K, L) = aK^{\mu} + bL^{\mu} \quad (a, b > 0; 0 < \mu < 1). \tag{2.23}$$

2.2. Оптимизационная задача производителя

2.2.1. Оптимальный производственный план

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что производственная функция $Q(x_1, \dots, x_n)$ является неоклассической с отрицательно определённой матрицей Гессе. Пусть p — цена единицы выпускаемой продукции, а $w = (w_1, \dots, w_n) > 0$ – вектор цен на ресурсы. Тогда

$$I(x_1, \dots, x_n) = pQ(x_1, \dots, x_n) \tag{2.24}$$

— *функция дохода*;

$$C(x_1,\dots,x_n)=w_1x_1+\dots+w_nx_n \tag{2.25}$$

— *функция затрат* (*издержек*);

$$\Pi(x_1,\dots,x_n)=pQ(x_1,\dots,x_n)-w_1x_1-\dots-w_nx_n \tag{2.26}$$

— *функция прибыли*.

Производитель стремится максимизировать прибыль, то есть решает следующую оптимизационную задачу, называемую *задачей производителя* (*фирмы*):

$$\Pi(x_1,\dots,x_n)\to\max \tag{2.27}$$

при условии:

$$x_i\ge 0\ \ (i=1,\cdots n) \tag{2.28}$$

Замечание 2.7. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $x>0$, то есть, что производитель использует в производстве все виды ресурсов (в противном случае можно уменьшить размерность R_+^n).

Определение 2.3. *Вектор ресурсов* $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)$, *являющийся решением задачи производителя* (2.27) — (2.28) *называется* ***оптимальным производственным планом***, *а максимальное значение производственной функции*.

$$Q^*=Q(x^*) \tag{2.29}$$

— ***оптимальным выпуском***.

Приравнивая к нулю частные производные функции прибыли, имеем

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x^*)-w_1=0; \\ \vdots \\ p\dfrac{\partial Q}{\partial x_n}(x^*)-w_n=0; \\ x_i^*>0. \end{cases} \tag{2.30}$$

То есть

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x^*)=w_1; \\ \vdots \\ p\dfrac{\partial Q}{\partial x_n}(x^*)=w_n. \end{cases} \tag{2.31}$$

$$x_i^* > 0. \tag{2.32}$$

Или в матричном виде:

$$p\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = w \tag{2.33}$$

$$x^* \gg 0\,; \tag{2.34}$$

где

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix};\ w = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix};\ x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}.$$

Так как $Q(x_1,\ldots,x_n)$ строго вогнута, то $\Pi(x_1,\ldots,x_n)$ будет также строго вогнута, а следовательно, условия (2.31), (2.32) являются не только необходимыми, но и достаточными, для того чтобы $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ был решение задачи производителя. Итак, доказана

Теорема 2.1. *Для того чтобы вектор* $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ *был оптимальным планом производства, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям* (2.31), (2.32).

Замечание 2.8. В силу строгой вогнутости функции прибыли задача производителя имеет единственное решение.

Замечание 2.9. Поверхность уровня функции затрат $C(x_1,\ldots,x_n)$ называется *изокостой*. Геометрическая трактовка соотношения (2.31) означают, что в точке x^* изокванта максимального уровня касается некоторой изокосты..

С экономической точки зрения равенства (2.31) говорят о том, что производителю выгодно увеличивать ресурс до тех пор, пока предельных доход (являющийся в силу (2.20) убывающей функцией) не станет равен цене ресурса. После достижения этого равенства производителю нет смысла увеличивать этот ресурс, так как полученный им дополнительный доход будет меньше затрат на ресурс, и, следовательно, увеличение ресурса приведёт к уменьшению прибыли.

Пример 2.1. Найти оптимальный план производства, если $Q(K;L) = 4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$, $p = 10$, цена капитала (рентная плата) $R = 0{,}5$ и заработная плата $W = 4$.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \dfrac{2\sqrt[4]{L}}{\sqrt{K}}; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial L} = \dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt[4]{L^3}}. \end{cases}$$

Подставляя данные нашей задачи в (2.31), получаем

$$\begin{cases} 10\dfrac{2\sqrt[4]{L}}{\sqrt{K}} = 0{,}5; \\ 10\dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt[4]{L^3}}. = 4; \\ K > 0; \\ L > 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$\begin{cases} K = 160000; \\ L = 1000. \end{cases}$$

2.2.2. Рентабельность производственного плана

Определение 2.4. *Производственный план* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *называется* ***рентабельным****, если функция прибыли* $\Pi(x)$ *положительна.*

Теорема 2.2. *Для того чтобы оптимальный план производства* $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ *был рентабельным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$E(Q)(x^*) < 1\,. \tag{2.35}$$

Доказательство. Согласно определению полной эластичности

$$E(Q)(x^*) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x^*)x_1^* + \dots + \dfrac{\partial Q}{\partial x_n}(x^*)x_n^*}{Q(x^*)} \tag{2.36}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби в левой части равенства (2.36) на p и воспользуемся (2.31), имеем

$$E(Q)(x^*) = \frac{w_1 x_1^* + \cdots + w_n x_n^*}{I(x^*)}. \qquad (2.37)$$

То есть

$$E(Q)(x^*) = \frac{C(x^*)}{I(x^*)}. \qquad (2.38)$$

Таким образом, в силу (2.38) неравенство (2.35) равносильно неравенству

$$I(x^*) - C(x^*) > 0,$$

доказывающему нашу теорему. ■

Замечание 2.10. Соотношение (2.38) показывает, что полная эластичность в точке x^* равна *норме издержек*, то есть той части дохода, которая затрачивается на издержки.

Следствие 2.1. Пусть Q — однородная производственная функция степени μ, *если*

$$\mu < 1,$$

то оптимальный план рентабелен.

Доказательство. На основании Следствия 1.1 имеем

$$E(Q)(x) = \mu.$$

Таким образом

$$E(Q)(x) < 1 \quad (\forall x \in R_+^n).$$

И в силу Теоремы 2.2 план рентабелен.■

Замечание 2.11. Из формулы (2.28) видно, что степень однородности μ является нормой издержек, а $(\mu - 1)$ — нормой прибыли, то есть

$$C(x^*) = \mu \cdot I(x^*);$$

$$\Pi(x^*) = (1 - \mu) \cdot I(x^*). \qquad (2.39)$$

2.3. Функция предложения и функции спроса на ресурсы

2.3.1. Однородность функций предложения и спроса

Изменение цены на продукцию и цен на ресурсы приводят к изменению оптимального производственного плана x^* и оптимального выпуска Q^*, определяя тем самым *функции спроса на i-ый ресурс*

$$x_i^* = D_i(w_1,\ldots,w_n,p) \quad (\forall\, i = 1,\ \ldots,\ n) \tag{2.40}$$

и *функцию предложения*:

$$Q^* = S(w_1,\ldots,w_n,p). \tag{2.41}$$

Пример 2.2. Найдём функцию предложения и функции спроса для двухфакторной функции Кобба-Дугласа.

Решение. Имеем $Q(K;L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, ($A > 0$; $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$);

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial L} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения в (2.31), получаем

$$\begin{cases} pA\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = R; \\ pA\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} = W; \\ K > 0; \\ L > 0. \end{cases}$$

Здесь R и W — соответственно рентная и заработная платы.

Решая последнюю систему, находим

$$\begin{cases} K^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\dfrac{R}{\alpha p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\dfrac{W}{\beta p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}; \\ L^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\dfrac{R}{\alpha p}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\left(\dfrac{W}{\beta p}\right)^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}. \end{cases} \tag{2.42}$$

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\dfrac{R}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\dfrac{W}{\beta p}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}. \tag{2.43}$$

Теорема 2.3. *Функции спроса* x_i^* *и функция предложения* Q^* *являются однородными функциями нулевой степени, то есть для любого* $t > 0$

$$D_i(tw_1,\ldots,tw_n,tp) = D_i(w_1,\ldots,w_n,p), \tag{2.44}$$

$$S(tw_1,\ldots,tw_n,tp) = S(w_1,\ldots,w_n,p). \tag{2.45}$$

Доказательство. Пусть x^* — решение системы (2.33)–(2.34), соответствующее цене на продукцию p и вектору цен на ресурсы w. Умножим обе части уравнения (2.33) на $t > 0$. Находим

$$tp\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = tw .$$

Таким образом, x^* является решением системы (2.33)–(2.34), соответствующее цене tp и вектору цен tw. То есть

$$x^*(tw,tp) = D_i(w,p) ,$$

что доказывает (2.44). Принимая во внимание это равенство, получаем для любого $t > 0$

$$Q^*(tw,tp) = Q^*\left(x^*(tw,tp)\right) = Q^*\left(x^*(w,p)\right) = Q^*(w,p) . \blacksquare$$

Следствие 2.2. *Имеют место соотношения*:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p}p = -\frac{\partial Q^*}{\partial w}w^T ; \qquad (2.46)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p}p = -\frac{\partial x^*}{\partial w}w^T . \qquad (2.47)$$

Справедливость соотношений (2.46), (2.47) вытекает из формулы Эйлера для однородной функции с учётом нулевой однородности x_i^* и Q^*.

Замечание 2.12. Подобно тому, как мы это делали в теории потребления, соотношения (2.44) с учётом (2.45) могут быть записаны в следующем виде:

$$x_i^* = d_i(\omega_1,\ldots,\omega_n) \qquad (2.48)$$

$$Q^* = s(\omega_1,\ldots,\omega_n) ; \qquad (2.49)$$

где

$$\omega_i = \frac{w_i}{p} \qquad (2.50)$$

— *реальные цены*, а

$$d_i(\omega_1,\ldots,\omega_n) = D_i\left(\frac{w_1}{p},\ldots,\frac{w_n}{p},1\right) ; \qquad (2.51)$$

$$s(\omega_1,\ldots,\omega_n) = S\left(\frac{w_1}{p},\ldots,\frac{w_n}{p},1\right) . \qquad (2.52)$$

Так, например, для двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа

$$\begin{cases} K^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (\alpha r)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}} (\beta\omega)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}; \\ L^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (\alpha r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} (\beta\omega)^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}. \end{cases} \quad (2.53)$$

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (\alpha r)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} (\beta\omega)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}; \quad (2.54)$$

где $r = \dfrac{R}{p}$ и $\omega = \dfrac{W}{p}$ — соответственно реальные рентная и заработная платы.

Из (2.53), (2.54) следует, что K^*, L^* и Q^*, записанные в реальных ценах также являются однородными (соответственно степени $\frac{1}{\alpha+\beta-1}$, $\frac{1}{\alpha+\beta-1}$ и $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}$). Это связано с тем, что функция Кобба-Дугласа сама является однородной степени $\alpha + \beta$. Эта ситуация сохраняется и в общем случае.

Теорема 2.4. *Если $Q(x_1,\ldots,x_n)$ — однородная степени μ функции полезности, то функции x_i^* и Q^* также являются однородными соответственно степени $\frac{1}{\mu-1}$ и $\frac{\mu}{\mu-1}$, то есть для любого $t > 0$*

$$d_i(t\omega_1,\ldots,t\omega_n) = t^{\frac{1}{\mu-1}} d_i(\omega_1,\ldots,\omega_n), \quad (2.55)$$

$$s(t\omega_1,\ldots,t\omega_n) = t^{\frac{\mu}{\mu-1}} s(\omega_1,\ldots,\omega_n). \quad (2.56)$$

Доказательство. Запишем уравнение (2.33) в реальных ценах, имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = \omega. \quad (2.57)$$

Пусть x^* — положительное решение уравнения (2.33), соответствующее ω. Покажем, что любого $t > 0$ вектор $t^{\frac{1}{\mu-1}} x^*$ является положительным решением этой системы, соответствующее вектору $t\omega$. Умножим обе части равенства (2.57) на $t > 0$. Получаем

$$t\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*)=t\omega\ . \qquad (2.58)$$

Так как Q — однородная функция степени μ, то $\frac{\partial Q}{\partial x}$ имеет степень однородности ($\mu-1$), поэтому из (2.58) находим

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t^{\frac{1}{\mu-1}}x^*)=t\omega\ .$$

А это означает, что вектор $t^{\frac{1}{\mu-1}}x^*$ является положительным решением уравнения (2.58), соответствующим $t\omega$. Следовательно, x^* имеет степень однородности $\frac{1}{\mu-1}$. С учётом этого факта и того, что Q — однородная функция степени μ, получаем:

$$Q^*(t\omega)=Q\left(x^*(t\omega)\right)=Q\left(t^{\frac{1}{\mu-1}}x^*(\omega)\right)=t^{\frac{\mu}{\mu-1}}Q\left(x^*(\omega)\right)=t^{\frac{\mu}{\mu-1}}Q^*(\omega).$$

Таким образом, вторая часть теоремы и вся теорема в целом доказаны. ■

2.3.2. Свойства функций предложения и спроса

Исследуем влияние цены на продукцию и цен на ресурсы на спрос и предложение. Продифференцируем соотношения (2.31) по p и w_i, имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+p\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_j\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k{}^*}{\partial p}=0\ ; \qquad (2.59)$$

$$p\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_j\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k{}^*}{\partial w_i}=\delta_{ij}\ . \qquad (2.60)$$

Или в матричном виде

$$pH\frac{\partial x^*}{\partial p}=-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T\ ; \qquad (2.61)$$

$$pH\frac{\partial x^*}{\partial w}=E\ . \qquad (2.62)$$

Так как матрица Гессе H отрицательно определена и, следовательно, невырождена, то из (2.61), (2.62) получаем

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{1}{p} H^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^T; \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \frac{1}{p} H^{-1}. \tag{2.64}$$

Теорема 2.5. *При росте цены на i-ый ресурс спрос на этот ресурс уменьшается, то есть*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i} < 0. \tag{2.65}$$

Доказательство. Так как матрица Гессе H отрицательно определена и $p > 0$, то из (2.64) следует, что и матрица Якоби

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

также отрицательно определена, а, следовательно, на её главной диагонали находятся отрицательные элементы. То есть

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} < 0; \cdots ; \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} < 0. \blacksquare \tag{2.67}$$

Замечание 2.13. Подобным образом доказывается, что спрос на ресурс является убывающей функцией от реальной цены на этот ресурс, то есть

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \omega_i} < 0.$$

Теорема 2.6. *Повышение цены на продукцию приводит к увеличению предложения.*

Доказательство. Продифференцируем Q^* по p, имеем

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x^*}{\partial p}. \tag{2.68}$$

Принимая во внимание (2.63), находим

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial x} H^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T. \tag{2.69}$$

В силу отрицательной определённости матрицы H^{-1}, правая часть равенства (2.69) больше нуля. Значит,

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} > 0\,. \blacksquare \tag{2.70}$$

Определение 2.5. *Ресурс называется* ***ценным****, если при увеличении цены на продукции спрос на него увеличивается, то есть*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p} > 0\,. \tag{2.71}$$

и ***малоценным*** *в противном случае.*

Следствие 2.3. *Существует хотя бы один ценный ресурс.*

Доказательство. Предположим противное, что все ресурсы являются малоценными, то есть

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p} \le 0; \forall i$$

Учитывая, что $\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0$, на основании нашего предположения получаем

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial p} \le 0\,.$$

А это противоречит (2.70) и доказывает теорему. ■

Теорема 2.7. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{\partial Q^*}{\partial w}^T = -\frac{\partial x^*}{\partial p}\,; \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w}^T = \frac{\partial x^*}{\partial w}\,. \tag{2.73}$$

Доказательство. Продифференцируем Q^* по w, имеем

$$\frac{\partial Q^*}{\partial w} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial w}. \tag{2.74}$$

Принимая во внимание (2.64), находим

$$\frac{\partial Q^*}{\partial w} = -\frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial x}H^{-1}. \tag{2.75}$$

Транспонируя (2.75) и учитывая (2.63), мы получаем (2.72).

В справедливости легко убедиться путём транспонирования соотношений (2.64).■

Непосредственно из (2.72) вытекают два следующих утверждения.

Следствие 2.4. *При росте цены на ценный ресурс спрос на продукцию падает.*

Следствие 2.5. *При росте цены на продукцию спрос на малоценный ресурс не возрастает.*

Замечание 2.14. Запишем равенство (2.72) в координатной форме. Имеем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_i}. \tag{2.76}$$

Эти соотношения показывают, что влияние на спрос на j-ый ресурс, оказываемое ростом цены на i-ый ресурс, равно влиянию на спрос на i-ый ресурс, оказываемому ростом цены на j-ый ресурс. В частности, $\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}$ и $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i}$ имеют общий знак. При этом, если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} < 0. \tag{2.76}$$

то говорят, что i-ый и j-ый ресурс образуют *взаимодополнительную* пару. Если же

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} > 0; \tag{2.77}$$

то блага называются *взаимозаменительными*.

2.4. Сопряженная производственная функция и двойственная задача

2.4.1. Сопряженная производственная функция

Условимся в дальнейшем считать, что $p = 1$, то есть, что функции x_i^* и Q^* заданы в реальных ценах.

Определение 2.6. *Функция*

$$Q^c(\omega) = \omega x^*(\omega) - Q(x^*(\omega)) \qquad (2.78)$$

называется ***сопряжённой*** *к производственной функции* $Q(x)$ *или* ***косвенной функцией убытков.***

Лемма 2.2. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega}(\omega) = x^{*T}; \qquad (2.79)$$

$$\frac{\partial^2 Q^c}{\partial \omega^2}(\omega) = H^{-1}; \qquad (2.80)$$

$$Q^c(\omega) + Q(x) \le \omega x. \qquad (2.81)$$

Доказательство.

1) Продифференцируем (2.78) по ω, с учётом (2.57) находим

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega} = \left(x^*\right)^T + \omega\frac{\partial x^*}{\partial \omega} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \omega} = \left(x^*\right)^T + \omega\frac{\partial x^*}{\partial \omega} - \omega\frac{\partial x^*}{\partial \omega} = \left(x^*\right)^T.$$

Справедливость (2.79) доказана.

2) Запишем теперь равенство (2.64) в реальных ценах, имеем

$$\frac{\partial x^*}{\partial \omega} = H^{-1}. \qquad (2.82)$$

Дифференцируя (2.79) по ω, получаем

$$\frac{\partial^2 Q^c}{\partial \omega^2} = \frac{\partial x^*}{\partial \omega}.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.82), получаем (2.80).

3) Так как $x^*(\omega)$ является точкой максимума функции прибыли $\ddot{I}\ (x) = Q(x) - \omega x$, то

$$Q(x) - \omega x \le Q\left(x^*(\omega)\right) - \omega x^*(\omega).$$

Из этого неравенства на основании (2.78) следует (2.81). Теорема доказана.

Замечание 2.15. Неравенство (2.81) носит название *неравенства Юнга-Френхеля.*

Теорема 2.8. *Пусть* $Q(x_1,...,x_n)$ *— неоклассическая строго вогнутая производственная функция, тогда косвенная функция убытков* $Q^c(\omega_1,...,\omega_n)$ *обладает следующими свойствами:*

1) *возрастает по любому аргументу:*

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega} > 0\ ; \tag{2.83}$$

2) *строго вогнута.*

Доказательство.

1) Соотношения (2.83) следуют непосредственно из (2.79) учётом того, что $x^* > 0$.

2) Строгая вогнутость Q^c вытекает из (2.80) и отрицательной определённости матрицы Гессе H. ■

Замечание 2.16. Если $Q(x_1,...,x_n)$ — однородная степени μ функции полезности, то из (2.39) следует, что сопряженная к ней функция пропорциональна функции спроса:

$$Q^c = (\mu - 1)Q^*.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $Q^c(\omega_1,...,\omega_n)$ является однородной степени $\frac{\mu}{\mu-1}$, а величина $(1-\mu)$ равна норме прибыли.

2.4.2. Двойственные задачи теории производства

Определение 2.7. *Задача*

$$(Q^c(\omega) - \omega x) \to \max_{\omega}\ ; \tag{2.84}$$

$$\omega \gg 0 \tag{2.85}$$

называется ***двойственной*** *к задаче*

$$(Q(\omega) - \omega x) \to \max_{x}\ ; \tag{2.86}$$

$$x \gg 0\ . \tag{2.87}$$

Решение двойственной задачи $\omega^*(x)$ называется *обратной функцией спроса* на ресурсы, а координата $\omega_i^*(x)$ — *обратной функцией спроса на i-ый ресурс.*

Теорема 2.9. *Функции* $\omega^*(x)$ *и* $x^*(\omega)$ *являются взаимообратными, то есть*

$$\omega^*(x^*(\omega)) = \omega ; \tag{2.88}$$

$$x^*(\omega^*(x) = x . \tag{2.89}$$

Доказательство. Существование обратной функции к $x^*(\omega)$ следует из (2.82). Так как матрица Гессе невырождена, то невырождена и матрица Якоби $\frac{\partial x}{\partial \omega}$. Докажем, что этой обратной функцией является $\omega^*(x)$. Для того чтобы $\omega^* > 0$ являлось решением двойственной задачи, соответствующее спросу x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega}(\omega^*) = x^T ; \tag{2.90}$$

Причём решение задачи (2.85), (2.86) в силу строгой вогнутости Q^c является единственным.

Рассмотрим решение двойственной задачи, соответствующее спросу $x = x^*(\omega)$. Таковым является $\omega^*(x^*(\omega))$. С другой стороны, как это следует из (2.79), решением двойственной задачи, соответствующее спросу $x = x^*(\omega)$ является также и ω. А так как решения задачи (2.85), (2.86) в силу строгой вогнутости Q^c единственно, то $\omega^*(x^*(\omega)) = \omega$.

В силу обратимости $\omega^*(x)$ из (2.88) следует (2.89). ■

Следствие 2.6. *Имеет место равенство*

$$(Q^c)^c = Q . \tag{2.91}$$

Доказательство. Согласно определению

$$(Q^c)^c(x) = \omega^*(x)x - Q^C(\omega^*(x)) .$$

Отсюда, принимая во внимание (2.78), получаем

$$(Q^c)^c(x) = \omega^*(x)x - \omega^*(x)x^*(\omega^*(x)) + Q(x^*(\omega^*(x))) .$$

Учитывая(2.89), находим

$$(Q^c)^c(x) = \omega^*(x)x - \omega^*(x)x + Q(x) = Q(x) .■$$

Вопросы и упражнения

1. Дайте определение и приведите пример производственной функции. Объясните экономический смысл аксиом, которым она удовлетворяет.

2. Что такое двухфакторная производственная функция? Каков экономический смысл её аргументов?

3. Перечислите и объясните экономический смысл основных экономико-математических характеристик производственной функции

4. Как связана степень однородности с отдачей от расширения масштаба производства.

5. Дайте определение и приведите пример неоклассической производственной функции.

6. Дайте определения изокванты и изокосты. Найдите и изобразите изокванты для линейной функции, функции Леонтьева и функции Кобба-Дугласа.

7. Сформулируйте задачу производителя. Что называется оптимальным планом производства?

8. Может ли задача производителя иметь несколько решений?

9. Какой оптимальный план называется рентабельным? Какая связь между рентабельностью и полной эластичностью?

10. Дайте определение функций спроса на ресурсы и функции предложения. Докажите, что они являются однородными функциями.

11. Что такое реальные цены?

12. Как изменяется спрос на ресурс при росте цены (реальной цены) на этот ресурс?

13. Как изменяется предложение при росте цены на продукцию?

14. Какой ресурс называется ценным (малоценным)?

15. Как изменяется предложение при росте цены на ценный ресурс?

16. Как изменяется спрос на малоценный ресурс при росте цены на продукцию?

17. Какие ресурсы называются взаимозаменительными (взаимодополнительными)?

18. Дайте определение сопряжённой производственной функции Q^c .

19. Докажите неравенство Юнга-Френхеля..

20. Докажите, что сопряжённая производственная функция возрастает по любому аргументу и строго вогнута.

21. Сформулируйте задачу, двойственную к задаче производителя.

22. Дайте определение и сформулируйте свойства обратной функции спроса на ресурс.

23. Докажите, что $(Q^c)^c = Q$.

24. Решите задачу производителя, если $Q(K,L) = 2\ln(5K+1) + 3\ln(2L+1)$. цена $p = 2$, рентная плата $R = 4$, заработная плата $W = 4$.

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Собственные векторы и собственные значения неотрицательных матриц.

3.1.1. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Определение 3.1. *Число* λ *называется* ***собственным значением (числом)*** $n\times n$ *матрицы A, если существует ненулевой n-мерный вектор-столбец x, такой что*

$$Ax = \lambda x\,; \tag{3.1}$$

при этом вектор x называется ***собственным вектором*** *матрицы A, соответствующим собственному значению* λ.

Для того чтобы число λ было собственным значением матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы оно было решением *характеристического уравнения*:

$$|\,A - \lambda E\,| = 0\,, \tag{3.2}$$

где E — единичная $n\times n$ матрица.

Замечание 3.1. Так как характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n-ой степени, то матрица A может иметь не более n действительных собственных значений.

Замечание 3.2. Собственные числа матрицы A и транспонированной матрицы A^T совпадают.

Замечание 3.3. Если x — собственный вектор матрицы A, то любой коллинеарный ему вектор (то есть вектор вида αx, $\alpha \neq 0$) также является собственным вектором матрицы A, причем оба вектора соответствуют одному и тому же собственному значению.

3.1.2. Число и вектор Фробениуса

Собственные векторы и собственные значения неотрицательных матриц являются важными характеристиками функционирования экономических систем. Особое место среди неотрицательных матриц занимают *неразложимые матрицы*.

Определение 3.2. *Матрица A называется* ***неотрицательной*** *(**положительной**) и обозначается* $A \geq 0$ $(A > 0)$, *если все ее элементы неотрицательны (положительны).*

Определение 3.3. *Неотрицательная квадратная* $n \times n$ *матрица A называется* ***разложимой***, *если одновременной перестановкой строк и столбцов ее можно привести к виду:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где 0 *— нуль-матрица, а* A_1 *и* A_2 *- квадратные матрицы размеров* $r \times r$ *и* $(n-r) \times (n-r)$ *соответственно; в противном случае матрица называется* ***неразложимой***.

Замечание 3.4. Любая положительная матрица неразложима.

Замечание 3.5. С экономической точки зрения разложимость матрицы говорит о том, что в рамках данной экономической системы существует некоторая автономная подсистема. Так, если элемент a_{ij} матрицы A показывает какое количество продукции i-ой отрасли используется в j-ой отрасли, то разложимость матрицы A говорит о том, что существует группа отраслей, не использующих продукцию остальных отраслей. Неразложимость матрицы A показывает, что любая отрасль хотя бы косвенным образом использует продукцию всех отраслей.

Замечание 3.6. Квадратная матрица A размера 2×2 разложима тогда и только тогда, когда либо $a_{12}=0$, либо $a_{21}=0$.

Действительно, если a_{21}=0, то матрица A уже приведена к виду (3.3). Если же a_{12}=0, то меняя местами первую и вторую строку, а затем первый и второй столбец (т. е. перенумеровав индексы) мы приведем матрицу к виду (3.3).

Замечание 3.7. Из разложимости матрицы A в общем случае не следует разложимость матрицы $(A)^2$. Так, например, матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ — неразложима, а $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ — разложима.

Теорема 3.1. *Неотрицательная матрица А имеет такое собственное значение $\lambda_A \ge 0$, что $\lambda_A \ge |\lambda|$ для любого собственного значения λ матрицы А. Кроме того, существует неотрицательный собственный вектор x_A, соответствующий собственному числу λ_A. Причем, если А неразложима, то $\lambda_A > 0$ и существует $x_A > 0$.*

Определение 3.4. *Собственное значение λ_A неотрицательной матрицы А называется* Фробениусовым числом (числом Фробениуса), *а собственный вектор $x_A \ge 0$ —* ***Фробениусовым вектором (вектором Фробениуса)*** *матрицы А.*

Пример 3.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Данная матрица неразложима. У нее существует два собственных значения: число Фробениуса $\lambda_A = 4$ с собственным вектором $x_A = t(2;1)^T$ (он является вектором Фробениуса при ($t > 0$) и собственное значение $\lambda_2 = -1$: ему соответствует собственный вектор $x = t(-2;1)^T \quad (t \ne 0)$. Очевидно, что $\lambda_A >(\lambda_2($.

Пример 3.2. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Данная матрица разложима. У нее существует два собственных значения: $\lambda_A = 3$ — фробениусово число: ему соответствует собственный вектор $x_A = t(0;\ 1)^T \ge 0$ при $t > 0$), и собственное значение $\lambda_2 = 1$ с собственным вектором $x = t(-1;1) \quad (t \ne 0)$.

Замечание 3.8. Так как собственные значения матриц A и A^T совпадают, то числа Фробениуса данных матриц равны.

Пусть p_A — вектор Фробениуса матрицы A^T, тогда

$$A^T p_A = \lambda_A p_A .$$

Транспонируя это равенство, мы получим (напомним, что в равенстве ниже $(p_A)^T$ рассматривается как вектор-строка):

$$(p_A)^T A = \lambda_A (p_A)^T .$$

Поэтому весьма естественно говорить о векторах $(p_A)^T$ и x_A как соответственно о левом и правом векторах Фробениуса матрицы A.

Следствие 3.1. *Если матрица $A \geq 0$ неразложима, то кроме вектора x_A (определенного с точностью до положительного множителя) у нее нет других неотрицательных собственных векторов.*

В самом деле, пусть существует вектор $y \geq 0$ такой, что

$$Ay = \lambda y .$$

Тогда, умножив это равенство слева на $(p_A)^T$, получим

$$\lambda_A \left((p_A)^T \cdot y \right) = \lambda \left((p_A)^T \cdot y \right). \quad \mathbf{(2.4)}$$

Так как $(p_A)^T > 0$, то $(p_A)^T \cdot y > 0$. Следовательно $\lambda = \lambda_A$. То есть все неотрицательные собственные векторы будут соответствовать λ_A. Более того, в силу Теоремы Фробениуса-Перрона $y > 0$. Предположим, что векторы x_A и y — линейно независимы. Так как эти векторы определены с точностью до положительного множителя, то мы можем считать, что первая координата у них равна 1. Тогда вектор $x_A - y$ будет собственным вектором матрицы A, соответствующий λ_A, но первая координата будет равна нулю, что противоречит Теореме Фробениуса-Перрона для неразложимой матрицы, следовательно, x_A и y — линейно зависимы, то есть $x_A = ty$ $(t > 0)$.

Следствие 3.2. *Если $A \geq B > 0$, то $\lambda_A \geq \lambda_B$.*

Следствие 3.3. *Пусть $A \geq 0$, тогда $(\lambda_A)^k$ является число Фробениуса $(A)^k$.*

Следствие 3.4. *Если λ_A — число Фробениуса матрицы $A \geq 0$, то $\alpha\lambda_A + \beta$ есть число Фробениуса матрицы $\alpha A + \beta E$,* $(\alpha, \beta > 0)$.

3.1.3. Свойства чисел Фробениуса.

Обозначим через r вектор, координата r_i которого есть сумма элементов i-ой строчки матрицы A, а через m — вектор, координата m_i которого есть сумма элементов i-того столбца матрицы A. Очевидно, что

$$\text{а) } r = Ae; \quad \text{б) } m = e^T A \tag{3.5}$$

где $e = (1,...,1)$. Пусть $m = \min m_i$; $M = \max m_i$; $r = \min r_i$; $R = \max r_i$. Тогда имеет место

Теорема 3.2. *Число Фробениуса λ_A неотрицательной матрицы A удовлетворяет условиям:*

$$\text{а) } R_1 \le \lambda_A \le R_2; \quad \text{б) } M_1 \le \lambda_A \le M_2 \tag{3.6}$$

Причем, если матрица A неразложима, то все неравенства строгие за исключением случая, когда $R_1 = R_2$ или $M_1 = M_2$.

Доказательство. Пусть x — вектор Фробениуса, сумма координат которого равна 1, т. е. $e^T x = 1$ (такой вектор мы можем всегда выбрать, так как, если сумма координат x равна $t > 0$, то вектор Фробениуса $y = \frac{1}{t} x$ будет иметь сумму координат, равную 1). Для x мы имеем

$$Ax = \lambda_A x .$$

Умножив это равенство слева на e^T и учитывая (3. 5б), получим

$$m^T x = \lambda_A e^T x .$$

Так как $e^T x = 1$, то $\lambda_A = m^T x = x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n$

Отсюда вытекает, что

$$M_1 (x_1 + ... + x_n) \le \lambda_A \le M_2 (x_1 + .. + x_n) \tag{3.7}$$

Причем, если матрица неразложима, то все $x_i > 0$, и в (3.7) оба неравенства строгие (за исключением случая $M_1 = M_2$). Учитывая, что сумма координат вектора x равна 1, из (3.7) получаем (3.6а). Соотношения (3.6б) получаются путем аналогичных рассуждений для матрицы A^T.

Следствие 3.5. *Если все суммы элементов строк (столбцов) неотрицательной матрицы A равны одному и тому же числу λ (то есть $R_1 = R_2 = \lambda$ или $M_1 = M_2 = \lambda$), то число Фробениуса λ_A равно λ.*

Пример 3.3. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&3\\3&5&0\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_A=6$, так как суммы элементов каждого столбца равны 6, и $\lambda_B=3$, так как суммы элементов любой строки равны 3.

3.2. Модель международной торговли

3.2.1. Статическая модель

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n стран. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$ — *вектор национальных доходов*, где x_i — национальных доход i-ой страны. Обозначим через $A=(a_{ij})$ — *структурную матрицу торговли*. Элемент a_{ij} матрицы A показывает, какую часть национального дохода j-ая страна тратит на закупку товаров у i-ой страны.

В результате торговли i-ая страна получит доход:

$$I_i=a_{i1}\,y_1+a_{i2}\,y_2+\dots+a_{in}\,y_n, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{3.8}$$

или в матричном виде

$$I=Ax, \tag{3.9}$$

где $I=(I_1,\dots,I_n)$ — *вектор доходов от торговли.*

В данной модели мы будем предполагать, что национальные доходы всех стран полностью тратятся на потребление. Данное условие может быть записано следующим образом:

$$a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}=1. \tag{3.10}$$

Или в матричной форме

$$e^T A=e^T; \tag{3.11}$$

где $e=(1,\dots,1)$.

Замечание 3.9. Соотношения (3.10) показывает, что все суммы элементов столбцов матрицы A равны 1. Следовательно, число Фробениуса λ_A матрицы A равно 1. Поэтому из (3.11) вытекает, что положительный вектор e является левым вектором Фробениуса структурной матрицы торговли A.

Естественно возникает вопрос, возможна ли в рамках данной экономической системы взаимовыгодная торговля, то есть, существует ли такой вектор x, при котором

$$Ax \geq x . \tag{3.12}$$

Эти соотношения показывают, что все страны получили либо прибыль, либо, по крайней мере, не имеют убытков. Покажем, что в (3.12) возможен лишь только знак равенства.

Действительно, предположим противное: что в неравенствах (3.12), рассмотренных в координатной форме, имеется хотя бы одно строгое неравенство. Тогда, умножив (3.12) слева на e^T, получим

$$e^T Ax > e^T x .$$

Учитывая (3.11), находим

$$e^T x > e^T x .$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно,

$$Ax = x . \tag{3.13}$$

С экономической точки зрения данный результат вполне очевиден, так как если были бы страны, имеющие прибыль, то в силу замкнутости данной экономической системы, должны быть и страны, имеющие убытки.

Замечание 3.10. Уравнение (3.13) носит название *уравнение обмена*. Так как число Фробениуса матрицы A равно единице, то из (3.13) вытекает, что неотрицательное решение x уравнения обмена (3.13) является правым вектором Фробениуса матрицы A. Следовательно, для любой модели международной торговли существует решение уравнения (3.13) (*равновесный вектор*), причем, если матрица A неразложима, то $x > 0$.

Замечание 3.11. Принимая во внимание, что вектор Фробениуса x_A определен с точностью до знака, точнее говорить о *равновесном распределении* национальных доходов. Если структурная матрица торговли A неразложима, то равновесное распределение национальных доходов определено однозначно.

Замечание 3.12. Модель международной торговли является частным случаем более общей модели, называемой *линейной моделью обмена*. Эта модель описывается матричным уравнением (3.13). В этой модели в общем случае не требуется выполнения условий (3.10) для матрицы A (*структурной ма-*

трицы обмена). То есть число Фробениуса матрица A необязательно равно единице. Однако наложение естественного условия $x > 0$ приводит к тому, что по необходимости x является вектором Фробениуса и число Фробениуса $\lambda_A = 1$.

Пример 3.4. Пусть структурная матрица торговли имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Определим равновесное распределение национальных доходов. Уравнение (3.13) в данном случае равносильно системе:

$$\begin{cases} 0,7x_1 + 0,6x_2 = x_1, \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 = x_2, \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,6x_3 = x_3. \end{cases}$$

Решив ее, находим, что $x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 1 : 1$, то есть $x_A = k(2;\ 1;\ 1), \quad k > 0$.

3.2.3. Динамическая модель и устойчивость

Предположим, что национальный доход $x(k+1)$ в период $k+1$ равен доходу от продажи в предыдущем периоде, то есть

$$x(k+1) = I(k). \tag{3.14}$$

С учетом (3.9) последнее условие принимает вид:

$$x(k+1) = Ax(k). \tag{3.15}$$

Если $x(0)$ — первоначальный вектор национального дохода, то из (3.13) следует, что в период k вектором национального дохода будет

$$x(k) = A^k x(0). \tag{3.16}$$

Определение 3.5. *Неразложимая А матрица называется* ***устойчивой****, если при любом векторе x существует предел последовательности* $A^k x$ *при* $k \to \infty (k \in N)$.

Примером неприводимой матрицы, не являющейся устойчивой, может служить матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы матрица была устойчивой, необходимо и достаточно, число Фробениуса $\lambda_A > |\lambda|$ для любого собственного значения λ матрицы A.

Замечание 3.13. Так как число Фробениуса структурной матрицы торговли A равно единице, то для устойчивости A, необходимо и достаточно, чтобы все остальные собственные значения по модулю были меньше единицы

Замечание 3.14. Из (3.15) вытекает, что, если $x(0) = x_A$, то

$x(k) = x_A$; (3.17)

то есть в результате торговли доходы стран останутся без изменения. Если $x(0) \neq x_A$, и матрица A устойчива, то $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \lim\limits_{k\to\infty}(A)^k x(0) = x^*$.

Переходя к пределу в (3.15), получаем

$Ax^* = x^*$.

Таким образом, предельное состояние x^* также является вектором Фробениуса матрицы A. Следовательно, вектор Фробениуса x_A определяет не только равновесное, но и предельное состояние системы.

3.3. Модель Леонтьева межотраслевого баланса.

3.3.1. Уравнение межотраслевого баланса

Рассмотрим экономическую систему, состоящую n отраслей, каждая из которых производит однородный продукт. Пусть x_i — объём продукции, выпускаемый i-ой отраслью за некоторый промежуток времени; x_{ij} – объём продукции i-ой отрасли, расходуемый j-ой отраслью в процессе производства; y_i – объём продукции i-ой отрасли, предназначенный для конечного потребления (то есть используемая в непроизводственной сфере).

Указанные величины связаны следующим ***уравнением баланса***:

$$x_i = x_{i1} + \cdots + x_{in} + y_i, \ (i=1,.., n). \qquad (3.18)$$

Мы будем исходить из аксиомы *линейности производства*, предполагающей что величины

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \qquad (3.19)$$

называемые ***коэффициентами прямых затрат***, остаются неизменными в рассматриваемый промежуток времени. Из (3.19) вытекает, что коэффициент a_{ij} показывает, какое количество продукции i-ой отрасли затрачивается на производство единицы продукции j-ой отрасли.

Таким образом,

$$x_{ij} = a_{ij}x_j, \ (i,j = 1,.., n). \qquad (3.20)$$

С учётом (3.19) уравнения баланса могут быть записаны в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ . \ . \ . + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ . \ . \ . + a_{2n}x_n + y_2 \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ . \ . \ . + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \qquad (3.21)$$

Введем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор валового выпуска, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ — вектор конечного потребления, а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.22)$$

— матрица прямых затрат; то система уравнения (3.21) может быть записана в матричной форме:

$$x = Ax + y. \qquad (3.23)$$

Матричное уравнение (3.23) называется ***уравнением Леонтьева.***

Основную задачу межотраслевого баланса можно сформулировать следующим образом: зная матрицу прямых затрат A и объемы конечного потребления y, найти объемы валового выпуска x.

3.3.2. Модель Леонтьева и линейная модель обмена

В вырожденном случае, когда $y = 0$, уравнение Леонтьева (3.23) совпадает с уравнением обмена (3.13). С другой стороны, уравнение Леонтьева для экономической системы из n отраслей можно записать как уравнение обмена для экономической системы из $(n + 1)$отраслей. Действительно, введем в рассмотрение $(n + 1)$-ю отрасль (*отрасль потребления*) с объёмом производства равным 1. Будем считать, что на единицу выпускаемой продукции эта отрасль использует продукции остальных отраслей в объёмах соответственно $y_1,\dots,y_n$ и свою собственную продукцию в объёме равном 1, при этом другие отрасли продукцию $(n + 1)$-ой отрасли не используют. Другими словами, матрица прямых затрат такой экономической системы имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} & y_2 \\ & \dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} & y_n \\ 0\ \ 0 & \dots\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

или в блочно-матричной форме

$$A=\begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Тогда уравнения Леонтьева (3.23), как нетрудно проверить, равносильно следующему уравнению обмена:

$$\begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

3.4. Продуктивность модели Леонтьева

Определение 3.6. *Неотрицательная матрица A называется* ***продуктивной****, если для любого неотрицательного вектора y существует неотрицательное решение x уравнения* (3.23). *При этом модель Леонтьева, соответствующая* *матрице прямых затрат A также называется* ***продуктивной.***

Уравнение (3.23) можно записать в следующем виде:

$$(E-A)x=y\ . \tag{3.27}$$

Если матрица $(E-A)$ обратима, то из (3.27) можно найти x:

$$x=(E-A)^{-1}y\ . \tag{3.28}$$

Отсюда следует, что если

$$(E-A)^{-1}\geq 0\ . \tag{3.29}$$

то $x\geq 0$ для любого $y\geq 0$, то есть матрица A продуктивна. Оказывается, что условия (3.29) является не только достаточным условием продуктивности, но и необходимым. Имеет место

Теорема 3.3 (первый критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)$ неотрицательно обратима.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из (3.29). Докажем необходимость. Пусть A — продуктивна. Тогда существуют неотрицательные решения уравнений:

$$\begin{aligned}&(E-A)x=e_1;\\&\vdots\\&(E-A)x=e_n;\end{aligned}$$

где

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

— единичные векторы. Обозначим эти решения соответственно через

$$s^1=\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{12}\\\vdots\\s_{1n}\end{pmatrix};\ \cdots;\ s^n=\begin{pmatrix}s_{n1}\\s_{n2}\\\vdots\\s_{nn}\end{pmatrix}.$$

Тогда неотрицательная матрица

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \dots s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} \dots s_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} \dots s_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной к $(E - A)$. Теорема доказана.

Определение 3.7. *Матрица* $S = (E - A)^{-1}$ *называется* ***матрицей полных затрат.***

Пример 3.5. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}7 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix},\ (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{60}{7} & 10 \\ \frac{50}{7} & 10 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Таким образом, матрица продуктивна.

Исследуем связь между продуктивностью матрицы и её числом Фробениуса.

Лемма 3.1. *Если существует решение уравнения Леонтьева* (3.23) *для* $y > 0$, *то*

$$\lambda_A < 1. \qquad (3.30)$$

Доказательство. Пусть $y > 0$, тогда, очевидно, $x > 0$. Умножим равенство (3.23) слева на левый вектор Фробениуса p_A^T, имеем

$$\lambda_A \left(p_A^T \cdot x\right) + \left(p_A^T \cdot y\right) = p_A^T \cdot x,$$

или

$$\left(1 - \lambda_A\right)\left(p_A^T \cdot x\right) = \left(p_A^T \cdot y\right).$$

Так как $p_A \geq 0;\ y > 0,\ x > 0$, то $\left(p_A^T \cdot x\right) > 0$ и $\left(p_A^T \cdot y\right) > 0$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что $\lambda_A < 1$. Лемма доказана.

Теорема 3.4 (второй критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.*

Доказательство. Пусть матрица A — продуктивна. Тогда существует неотрицательное решение уравнения Леонтьева для любого $y \geq 0$. Выберем $y > 0$. Тогда на основании Леммы 3.1 имеем $\lambda_A < 1$.

Обратно, пусть A имеет число Фробениуса $\lambda_A < 1$. Покажем, что она продуктивна. Зададим $y \geq 0$ и покажем, что уравнения (3.23) имеет решение $x \geq 0$. Рассмотрим неотрицательную матрицу $\tilde{A}$, задаваемую соотношением (3.25).

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В силу того, что $\lambda_A < 1$, число Фробениуса матрицы $\tilde{A}$ равно 1. Действительно, $\lambda_{\tilde{A}} = \max\{\lambda_A; 1\} = 1$. Согласно теореме 3.1 существует неотрицательный собственный вектор

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}; \qquad (3.31)$$

соответствующий собственному числу $\lambda_{\tilde{A}} = 1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}. \qquad (3.32)$$

Или

$$\begin{cases} Ax + y\, x_{n+1} = x, \\ x_{n+1} = x_{n+1}. \end{cases} \qquad (3.33)$$

Так как $Ax \neq x$, то $x_{n+1} \neq 0$. Пусть $x_{n+1} = 1$ (вектор Фробениуса определён с точностью до положительного множителя), тогда

$$Ax + y = x. \qquad (3.34)$$

Причём, $x \geq 0$. Следовательно, A — продуктивна. Теорема доказана.

Следствие 3.6. *Если существует решение уравнения Леонтьева* (3.23) *для* $y > 0$, *то матрица A продуктивна.*

Справедливость этого утверждения вытекает из леммы 3.1 на основании теоремы 3.4.

Следствие 3.7. *Если сумма любого столбца матрицы* (*любой строки*) *меньше единицы, то матрица продуктивна.*

Доказательство. Если сумма любого столбца матрицы (любой строки) меньше единицы, то число Фробениуса матрицы меньше единицы. Следовательно, матрица продуктивна.

Замечание 3.15. С экономической точки зрения сумму элементов столбца матрицы A можно трактовать как суммарные затраты отрасли на выпуск единицы продукции. Если эти затраты меньше единицы, то отрасль рентабельна. Таким образом, следствие 3.7 утверждает что, если все отрасли рентабельны, то матрица A продуктивна.

Пример 3.6. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как обе суммы элементов столбцов матрицы меньше единицы, то матрица A продуктивна.

3.5. Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева, так называемую ***модель равновесных цен***. Пусть, как и прежде, A — матрица прямых затрат, x — вектор валового выпуска. Обозначим через $p = (p_1, \ldots, p_n) > 0$ — вектор цен (где p_i — цена единицы продукции i-той отрасли); тогда, например, первая отрасль получит доход, равный $p_1 \cdot x_1$. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21}, и т.д., n-ой отрасли в объеме a_{n1}. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_1(a_{11}p_1+a_{21}p_2+\ldots + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую *добавленной стоимостью*, мы обозначим через V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции). Таким образом, имеет, следующее равенство:

$$x_1p_1=x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n)+V_1.$$

Разделив это равенство на x_1, получаем

$$p_1=a_{11}p_1+a_{21}p_2+\ldots+a_{n1}p_n+v_1,$$

где $v_1=V_1/x_1$ — *норма добавленной стоимости* (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции). Подобным же образом получаем для остальных отраслей

$$\begin{aligned} p_2&=a_{12}p_1 + a_{22}p_2+\ldots+a_{n2}p_n + v_2\\ &\vdots\\ p_n&=a_{1n}p_n+a_{2n}p_2+\ldots+a_{nn}p_n+v_n. \end{aligned}$$

Найденные равенства, как нетрудно видеть, могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$p=A^{T}p+v\ ,\ . \qquad (3.35)$$

где $v=(v_1, v_2,\ldots, v_n)$ — вектор норм добавленной стоимости. Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева, с той лишь разницей, что x заменен на p, а y — на v, A — на A^T.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример 3.7. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей. Назовем их условно: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство. Пусть

$$A^T=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

— транспонированная матрица прямых затрат, $v^T=(4,\ 10,\ 4)$ — вектор норм добавленной стоимости. Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой $p = S^T \nu$, где $S^T = \left((E-A)^{-1}\right)^T$ – транспонированная матрица полных затрат.

После необходимых вычислений имеем

$$S^T = \frac{1}{0{,}444}\begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}14 & 0{,}18 \\ 0{,}28 & 0{,}68 & 0{,}24 \\ 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}69 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Вопросы и упражнения

1. Дайте определение и приведите пример разложимой (неразложимой) неотрицательной матрицы.

2. Может ли быть неразложимой положительная матрица. Дайте экономическую интерпретацию (разложимости) неразложимости матрицы.

3. Дайте определение числа Фробениуса неотрицательной матрицы.

4. Дайте определение правого и левого вектора Фробениуса неотрицательной матрицы.

5. Чему равно число Фробениуса структурной матрицы торговли?

6. Найдите равновесный вектор для модели международной торговли со структурной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите число Фробениуса матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Найдите левый и правый векторы Фробениуса матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Запишите уравнение Леонтьева межотраслевого баланса и объясните экономический смысл, входящих в него слагаемых.

10. Какая матрица называется продуктивной?

11. Какая связь между продуктивностью матрицы и её числом Фробениуса? Является ли продуктивной матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

12. Дайте определение матрицы полных затрат. Каким образом эта матрица связана с продуктивностью модели Леонтьева.

13. Какая связь между рентабельностью отраслей и продуктивностью модели Леонтьева.

14. Запишите модель, двойственную к модели Леонтьева и дайте её экономическую трактовку.

15. Какая связь между продуктивностью модели Леонтьева и модели равновесных цен?

16. Дайте экономическую трактовку слагаемых, входящих в равенство (3.36).

ГЛАВА 4. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. Простейшие модели экономического роста

4.1.1. Модель естественного роста (рост при постоянном темпе)

Рассмотрим микроэкономическую модель роста, называемую ***моделью естественного роста***. Пусть $y(t)$ — величина выпуска продукции некотрого предприяития в момент времени t, $I(t)$ — величина инвестиций, p — стоимость единицы продукции. Будем предполагать, что выполнены следующие аксиомы.

1) Инвестиции пропорциональны выручке от продажи

$$I(t) = \alpha p y(t), \tag{4.1}$$

где $\alpha > 0$ – *норма чистых инвестиций*, т.е. часть дохода py, которая тратится на чистые инвестиции.

2) ***Принцип акселерации***: прирост выпуска, пропорционален чистым инвестициям:

$$By'(t) = I(t), \tag{4.2}$$

где $B > 0$ – *норма акселерации*.

3) Объем продаж предприятия не является столь высоким, чтобы существенно влиять на цену товара p, которую (ввиду этого) мы будем считать фиксированной.

Подставляя выражение для $I(t)$ из (4.1) в (4.2) получаем

$$y' = ky, \tag{4.3}$$

где $k = \alpha p/B$. Разделяя переменные в уравнении (4.3), имеем

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

Отсюда после интегрирования обеих частей находим

$$\ln|y| = kt + \ln|C|,$$

или окончательно

$$y = Ce^{kt}. \tag{4.4}$$

Интегральная кривая уравнения (4.3) имеет вид, показанный на рис. 4.1.

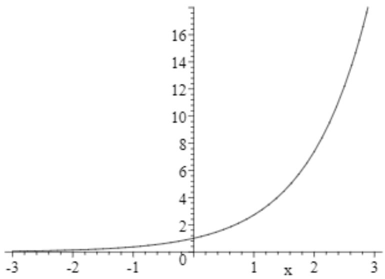


Рис. 4.1

Если $y(t_0) = y_0$, то из (4.4) следует, что $C = y_0 e^{-kt_0}$, т.е.

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.3) называется *уравнением естественного роста*. Этим уравнением описываются также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции, процессы радиоактивного распада и процессы размножения бактерий. Данную модель целесообразно применять для исследования начальных этапов развития экономической системы и в течение ограниченного промежутка времени, поскольку, как это следует из уравнения (4.5), с течением времени y может принимать достаточно большие значения, что не может не сказаться на изменении цены (в данной модели мы ее предполагали постоянной).

Замечание 4.1. Величина

$$k = \frac{y'(t)}{y(t)} \tag{4.6}$$

называется темпом роста функции $y(t)$. Так как в данной модели эта величина предполагалась постоянной, то данная модель носит также название модели ***роста при постоянном темпе***.

4.1.2.°Связь между эластичностью спроса и видом выпуклости выпуска

Рассмотрим более общий случай по сравнению с предыдущим пунктом. Предположим, что увеличением выпуска приводит к падению цены, то есть, что $p = p(y)$ — убывающая функция $\left(\frac{dp}{dy} < 0\right)$. Проведя аналогичные рассуждения, получим уравнение:

$$y' = kp(y) \times y, \tag{4.7}$$

где $k = \alpha / B$.

Уравнение (4.7) представляет собой автономное дифференциальное уравнение. Так как $k > 0$, $p > 0$, $y > 0$, то из него следует, что $y(t)$ — возрастающая функция ($y' > 0$). Исследуем $y(t)$ на выпуклость. Дифференцируя уравнение (4.7) по t, имеем:

$$y'' = ky'\left(\frac{dp}{dy} \cdot y + p\right) = ky'p\left(\frac{dp}{dy} \cdot \frac{y}{p} + 1\right),$$

$$y'' = ky'p\left(1 - \frac{1}{|e_y|}\right),$$

где $e_y = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y} < 0$ — эластичность спроса. Из последнего соотношения вытекает, что если спрос эластичен ($|e_y| > 1$), то $y'' > 0$

и интенсивность выпуска $y(t)$ — выпуклая функция, а если спрос неэластичен ($|e_y| < 1$), то $y'' < 0$ и $y(t)$ — вогнутая функция.

4.1.3.°Логистический рост

Рассмотрим наиболее простой вид зависимости цены от выпуска – линейный, т.е. предположим, что

$$p(y) = b - ay \ (a,\, b > 0). \qquad (4.8)$$

Тогда уравнение (4.7) принимает вид

$$y' = k(b - ay)y. \qquad (4.9)$$

У автономного уравнение (4.9) существуют две стационарные точки: $y = 0$ — *аттрактор*, и $y = \dfrac{b}{a}$ — *репеллер*. Кроме того, нетрудно показать, что $y'' > 0$ при $y < \dfrac{b}{2a}$, и $y'' < 0$ при $y > \dfrac{b}{2a}$. График функции $y(t)$ в области значений, имеющих экономический смысл изображен на рис. 4.2.

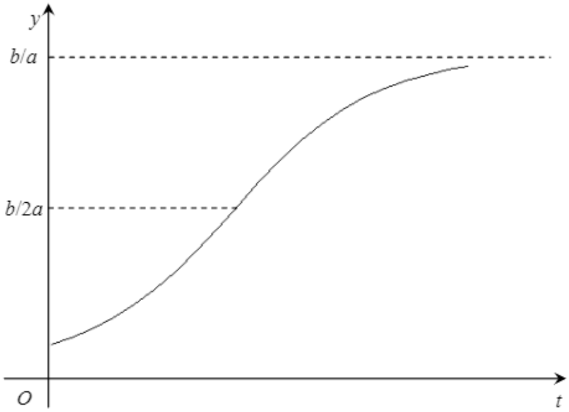


Рис. 4.2

В данном случае нетрудно получить и явное выражение для $y(t)$. Разделяя переменные в уравнении (4.9), находим

$$\frac{dy}{y(b-ay)}=kdt, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{b}\left(\frac{1}{y}+\frac{a}{b-ay}\right)=kdt.$$

Проинтегрировав это соотношение, имеем:

$$\ln|y| - \ln|b - ay| = kbt + \ln C,$$

$$\frac{y}{b-ay}=Ce^{kbt}.$$

Отсюда получим, что

$$y=\frac{Cbe^{bkt}}{1+Cae^{bkt}}.$$

Интегральная кривая уравнения (4.9) называется *логистической кривой*. Она также описывает некоторые модели распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, жизненные циклы технологических укладов, процессы размножения бактерий в ограниченной среде обитания и др.

Замечание 4.2. Из графика логистической кривой видно, что при малых t логистический рост схож с естественным ростом, однако при больших t характер роста меняется, темпы роста замедляются и кривая асимптотически приближается к стационарному решению $y=\frac{b}{a}$.

Для уравнения (4.9) существуют решения и при $y>\frac{b}{a}$. График одного из таких решений показан на рис. 4.3. Но так как в этом случае $p(y)<0$, то они не имеют экономической интерпретации.

Замечание 4.3. Интегральная кривая дифференциального уравнения

$$y' = k(t)(y - y_1)(y_2 - y), \tag{4.10}$$

где $k(t) > 0$, $y_2 > y_1 > 0$, называется *обобщенной логистической кривой.*

Уравнение (4.10) используется для описания моделей роста в макроэкономике, в частности роста в условиях инфляции или роста с учетом технологического прогресса. При этом множитель $k(t)$ носит соответственно название *мультипликатор инфляции*, или *мультипликатор технологического прогресса*. Проделав выкладки, аналогичные тем, что были проведены выше для уравнения (4.9), нетрудно получить решения:

$$y = y_1 \quad , y = y_2, \; y = \frac{y_1 + y_2 C e^{P(t)}}{1 + C e^{P(t)}},$$

где $P(x) = (y_2 - y_1)\int k(t)dt.$

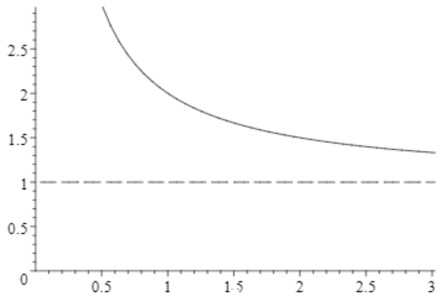


Рис. 4.3

4.1.4.°Общий случай

Более реалистичной является модель, в которой скорость роста зависит не от дохода, а от прибыли. Пусть $S(y) = \alpha y + \beta$ — функция издержек, где αy – переменные издержки, а β — постоянные (α, β — const), тогда

$$y' = k(p(y) \times y - \alpha y - \beta). \quad (4.11)$$

Если теперь предположить, что

$$p(y) = b - ay \; (a, b > 0), \quad (4.12)$$

то правая часть уравнения (4.11) будет представлять собой квадратный трехчлен относительно y с отрицательным коэффициентом перед y^2. В этом случае возможны три варианта.

а) $D < 0$. В этом случае $y' < 0$. Издержки настолько велики, что это приводит к постоянному падению уровня производства и в конечном итоге – к банкротству (рис. 4.4).

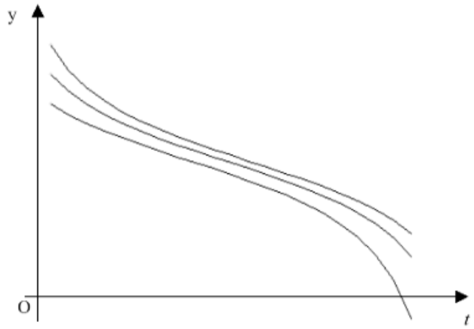


Рис. 4.4

б) $D = 0$. В этом случае $y' < 0$ и имеется одна стационарная точка — *убывающий шунт*:

$$y = y^* > \frac{b}{a}.$$

При этом интегральные кривые, удовлетворяющие начальному условию $y(t_0) = y_0 > y^*$ (тогда $y_0 < b/a$), будут асимптотически приближаться к y^* на $+\infty$, а удовлетворяющие условию $y(t_0) < y^*$, будут асимптотически приближаться к y^* на $-\infty$ (рис. 4.5).

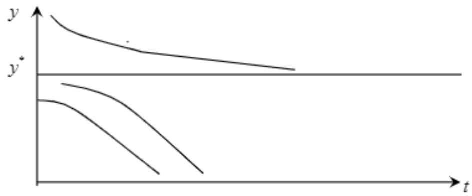


Рис. 4.5

в) $D > 0$. В этом случае существуют два стационарные точки $y = y_1$ (репеллер), $y = y_2$ (аттрактор) ($0 < y_1 < y_2 < b/a$). При этом $y' > 0$ при $y_1 < y < y_2$, и $y' < 0$ при $y < y_1$ или $y > y_2$ (рис. 4.6).

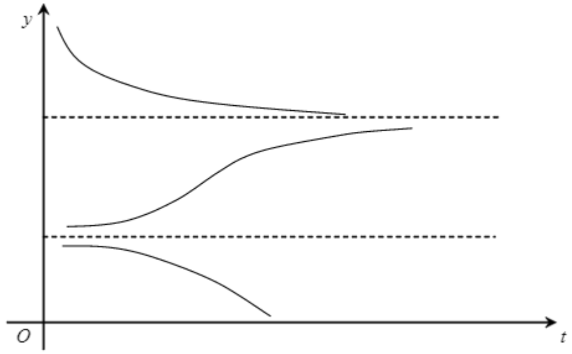


Рис. 4.6

Предлагаем читателю самостоятельно проинтегрировать уравнение (4.11) (в предположении $p(y) = b - ay$) и получить явные выражения для y.

4.2. Модель роста Харрода — Домара

4.2.1. Основные предположения модели

Макроэкономическая модель Харрода-Домара описывает динамику изменения национального дохода $Y(t)$ в зависимости от потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$. Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) *балансовое ограничение*

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{4.13}$$

2) *принцип акселерации*

$$BY'(t) = I(t)\ , \tag{4.14}$$

где $B > 0$.

Из (4.13) на основании (4.14) следует, что

$$BY'(t) = Y(t) - C(t)\ . \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Его частным решением, удовлетворяющим начальному условию

$$Y(0) = Y_0\ , \tag{4.16}$$

является

$$Y(t) = -\beta e^{\beta t}\int_0^t C(x)e^{-\beta x}dx + Y_0 e^{\beta t}, \qquad (4.17)$$

где $\beta = \dfrac{1}{B}$ — предельная фондоотдача, $Y_0 > 0$.

Решение задачи Коши соответствующего однородного уравнения

$$BY'(t) = Y(t) \qquad (4.18)$$

имеет вид

$$Y(t) = Y_0 e^{\beta t}. \qquad (4.19)$$

Этот случай соответствует предположению, что $C(t) \equiv 0$, то есть отсутствию потребления. И хотя этот случай имеет скорее теоретический интерес, он всё же приводит нас к простому, но весьма поучительному заключению: *в отсутствии потребления экономика имеет устойчивый рост*.

4.2.2. Случай постоянного потребления

Рассмотрим наиболее простой вариант модели, когда

$$C(t) = C_0, \quad (C_0 > 0). \qquad (4.20)$$

В этом случае уравнение (4.15) принимает вид

$$Y'(t) = \beta Y(t) - \beta C_0. \qquad (4.21)$$

Данное уравнение имеет очевидное частное решение

$$Y(t) = C_0. \qquad (4.22)$$

Следовательно, его общим решением будет

$$Y(t) = C_0 + Ae^{\beta t}. \qquad (4.23)$$

где A — произвольная постоянная, а

$$Y(t) = Ae^{\beta t}. \qquad (4.24)$$

Рассмотрим решение задачи Коши (4.21), (4.19):

$$Y(t) = C_0 + (Y_0 - C_0)e^{\beta t}. \qquad (4.25)$$

Из (4.25) следует, что если $Y_0 < C_0$, то национальный доход убывает; он не меняется, если $Y_0 = C_0$; и только лишь случай $Y_0 > C_0$ характеризуется устойчивым ростом экономики. Рассмотрим, чему в этом случае будет равен темп роста. Из (4.21) вытекает, что

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \beta - \frac{C_0}{Y(t)}. \qquad (4.26)$$

Следовательно, с ростом времени темп роста будет возрастать и стремиться к своему предельному значению β. Это объясняется тем, что с ростом национального дохода при постоянном потреблении удельная доля потребления будет уменьшаться. Напомним, что темп роста, равный β, возможен лишь при полном отсутствии потребления.

4.2.3. Случай роста потребления с постоянным темпом

Рассмотрим теперь вариант модели при условии, что потребление растёт с постоянным темпом k, то есть

$$C(t) = C_0 e^{kt}, \quad (C_0 > 0). \qquad (4.27)$$

С учётом этого предположения уравнение (4.15) преобразуется к виду

$$Y'(t) = \beta Y(t) - \beta C_0 e^{kt}. \qquad (4.28)$$

Полученное уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Возможны два случая: *основной*, если

$$k \neq \beta. \qquad (4.29)$$

и *резонансный*, если

$$k = \beta. \qquad (4.30)$$

Начнём с *основного* случая. В этом случае решение уравнения (4.28), удовлетворяющее начальному условию $Y(0) = Y_0$, на основании (4.17) имеет вид:

$$Y(t) = \left(\frac{\beta C_0}{\beta - k}\right) e^{kt} + \left(Y_0 - \frac{\beta C_0}{\beta - k}\right) e^{\beta t}, \qquad (4.31)$$

или

$$Y(t) = A_1 e^{kt} + A_2 e^{\beta t}, \qquad (4.32)$$

где

$$A_1 = \left(\frac{\beta C_0}{\beta - k}\right); \qquad (4.33)$$

$$A_2 = \left(Y_0 - \frac{\beta C_0}{\beta - k}\right). \qquad (4.34)$$

Из уравнения (4.31) следует, что если $k > \beta$, то первое слагаемое этого уравнения отрицательно и по абсолютному значению растёт быстрее, чем второе слагаемое. Следовательно, через некоторое время национальный доход станет отрицательным. Таким образом, экономика, в которой *темп роста потребления k выше, чем предельная фондоотдача* β, *обречена на крах.*

Пусть $k < \beta$, коэффициент A_2 при втором слагаемом в уравнении (4.31) можете быть преобразован к виду:

$$A_2 = \frac{\beta Y_0}{\beta - k}(1-\rho), \tag{4.35}$$

где

$$\rho = \frac{k}{\beta} + \frac{C_0}{Y_0}. \tag{4.36}$$

Из (4.35) вытекает, что если $\rho > 1$, то второе слагаемое в уравнении (4.31) будет отрицательным, и в силу условия $k < \beta$ по абсолютному значению будет расти быстрее, чем первое слагаемое. Следовательно, также как в ситуации, рассмотренной выше, через некоторое время национальный доход станет отрицательным. В частности, если $C_0 > Y_0$ (то есть, если начальное потребление больше, чем начальный доход), то $\rho > 1$.

Если $\rho = 1$, то второе слагаемое в уравнении (4.31) будет равно нулю, и уравнении примет вид:

$$Y(t) = Y_0 e^{kt}. \tag{4.37}$$

В этом случае рост национального дохода происходит с постоянным темпом k, а доля потребления в национальном доходе в силу (4.27) будет постоянной

$$\frac{C}{Y} = \frac{C_0}{Y_0}. \tag{4.38}$$

Если $\rho < 1$, то оба слагаемых в уравнении (4.31) будут положительными, что соответствует устойчивому росту национальному доходу.

Остаётся рассмотреть *резонансный случай* $k = \beta$. Из (4.17) получаем решение уравнения (4.28), удовлетворяющее начальному условию $Y(0) = Y_0$:

$$Y(t) = \left(Y_0 - ktC_0\right)e^{kt}\,. \tag{4.39}$$

Так как слагаемое в скобках в уравнении (4.37) с ростом времени станет отрицательным, то данный случай также приводит сначала к уменьшению национального дохода, а потом и к полному краху экономики.

Заметим, что из (4.36) вытекает, что если $k \geq \beta$, то $\rho > 1$. Принимая это во внимание и объединяя все случаи, мы приходим к следующему выводу:

если $\rho \leq 1$, *то происходит устойчивый рост национального дохода,*

если $\rho > 1$, *то со временем национальный доход становится отрицательным.*

4.3. Динамическая модель рынка Вальраса

Рассмотрим рынок одного товара. Пусть $D(p(t))$ и $S(p(t))$ – соответственно величины спроса и предложения при цене $p(t)$ в момент времени t. В модели предполагается, что производная цены пропорциональна неудовлетворённому спросу $D(p)$– $S(p)$:

$$p' = k(D(p) - S(p)), \tag{4.40}$$

где $k > 0$. Таким образом, если спрос превышает предложение, то цена растёт, и падает, если предложение превышает спрос.

Уравнение (4.40) является *автономным*. Предполагается, что спрос $D(p)$ является убывающей функцией от цены, а предложение $S(p)$ — возрастающей, поэтому, если у уравнения

$$D(p) = S(p) \tag{4.41}$$

существует решение p^*, называемое *равновесной ценой*, то это решение единственное. Следовательно, уравнение (4.40) может иметь только одно стационарное решение

$$p(t) = p^*. \tag{4.42}$$

Предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями

$$D(p) = a - bp,\ S(p) = m + lp, \tag{4.43}$$

где a, b, m, l – некоторые числа ($a, b, l > 0$). С учетом (4.43) уравнение (4.40) примет вид

$$p' = k(a - m) - k(l + b)p. \qquad (4.44)$$

Уравнение (4.44) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Найдем решение соответствующего ему однородного уравнения. Имеем:

$$\frac{dp}{dt} = -k(l+b)p, \quad p(t) = e^{-k(l+p)t}. \qquad (4.45)$$

В качестве частного решения уравнения (4.44) можно использовать стационарное решение (аттрактор)

$$p^* = \frac{a-m}{b+l}.$$

где p^* — корень уравнения $D(p) = S(p)$.

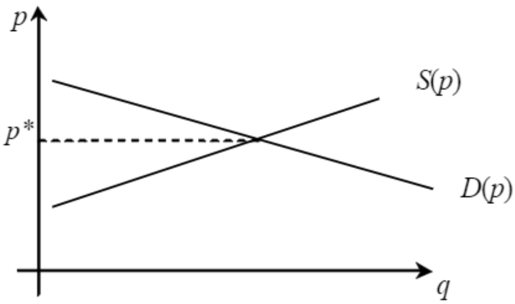


Рис. 4.7

Таким образом, общее решение уравнения (4.44) имеет вид

$$p(t) = \frac{a-m}{b+l} + Ce^{-k(l+b)t}. \qquad (4.46)$$

Из (4.46), вытекает, что с течением времени интегральные кривые будут асимптотически приближаться к стационарному решению, а цена — соответственно к своему равновесному значению p^*.

4.4. Динамические модели Кейнса

4.4.1. Модель Кейнса с акселерацией

Как известно, статическая модель Кейнса, задаётся уравнениями

$$Y(t) = C(t) + I(t), \tag{4.47}$$

$$C(t) = aY(t) + C_0, \tag{4.48}$$

где $Y(t)$ — национальный доход, $C(t)$ — потребление, $I(t)$ — инвестиции, a — предельная склонность к потреблению, C_0 — автономное потребление.

Предположим также, что выполнен принцип акселерации

$$BY'(t) = I(t). \tag{4.49}$$

где $B > 0$. В силу (4.48), (4.49) балансовые соотношения (4.47) принимают вид

$$BY'(t) = (1-a)Y(t) - C_0. \tag{4.50}$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. У него существует стационарное решение (*репеллер*)

$$Y^*(t) = \frac{C_0}{1-a}. \tag{4.51}$$

Общее решение уравнения (4.50) имеет вид

$$Y(t) = \frac{C_0}{1-a} + Ae^{\beta t}, \tag{4.52}$$

где A — произвольная постоянная. Частным этого решением, удовлетворяющим начальному условию $Y(0) = Y_0$, будет:

$$Y(t) = \frac{C_0}{1-a} + \left(Y_0 - \frac{C_0}{1-a}\right)e^{\beta t}.$$

Таким образом, если $Y_0 > \dfrac{C_0}{1-a}$, то национальный доход $Y(t)$ возрастает; если $Y_0 < \dfrac{C_0}{1-a}$ — убывает и со временем станет отрицательным; если $Y_0 = \dfrac{C_0}{1-a}$ — остаётся без изменения.

4.4.2. Модель Кейнса с запаздыванием

Данная модель строится в следующих предположениях:

$$Y(t) = C(t) + I(t), \tag{4.53}$$

$$C(t) = aY(t-\tau) + C_0, \tag{4.54}$$

$$BY'(t) = I(t-\tau), \quad B > 0, \tau > 0. \tag{4.55}$$

Таким образом, в данной модели постулируется, что уровень потребления C в момент времени t зависит от национального дохода Y, полученного в более ранний момент времени $t-\tau$, и, соответственно, прирост национального дохода $Y'(t)$ зависит от инвестиций, сделанных на более раннем этапе.

С точностью до бесконечно малых величин второго порядка можно считать, что

$$Y(t-\tau)=Y(t)-\tau Y'(t)\,, \tag{4.56}$$

$$I(t-\tau)=I(t)-\tau I'(t)\,. \tag{4.57}$$

В силу этого соотношения (4.54), (4.55) преобразуются к виду

$$C(t)=aY(t)-a\tau Y'(t)-C_0\,, \tag{4.58}$$

$$BY'(t)=I(t)-\tau I'(t)\,. \tag{4.59}$$

Подставляя выражение для $C(t)$ в (4.53), находим

$$sY(t)=I(t)-a\tau Y'(t)+C_0\,, \tag{4.60}$$

где $s=1-a$ — предельная склонность к сбережениям. Дифференцируя это равенство, имеем

$$sY'(t)=I'(t)-a\tau Y''(t)\,, \tag{4.61}$$

Умножая (4.61) на τ и вычитая результат из (4.60), в силу (4.59) получаем

$$a\tau^2Y''(t)+(B+\tau(s+a))Y'(t)-sY(t)=-C_0\,. \tag{4.62}$$

Уравнение (4.62) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. У данного уравнения, также как и уравнения (4.50) из предыдущей модели, существует стационарное решение

$$Y^*(t)=\frac{C_0}{1-a}\,. \tag{4.63}$$

Очевидно, что дискриминант характеристического уравнения

$$a\tau^2\lambda^2+(B+\tau(s+a))\lambda-s=0 \tag{4.64}$$

будет больше нуля, а, следовательно, корни характеристического будут действительными и различными. Таким образом, общее решение уравнения (4.62) имеет вид:

$$Y(t)=\frac{C_0}{1-a}+A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}\,. \tag{4.65}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные. Также как и в модели Харрода-Домара, в зависимости от начальных условий и коэффициентов уравнения возможны различные варианты поведения решений этого равнения. Предлагаем читателю проанализировать их самостоятельно.

4.5. Неоклассическая модель роста Солоу

4.5.1. Неоклассическая производственная функция

Пусть K — величина капитала (фондов), затраченного в процессе производства, а L — трудовые затраты.

Напомним, что функция $F(K, L)$, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, называется **неоклассической производственной функцией**, если, она удовлетворяет следующим условиям:

$$F(K,L) \geq 0; \ \forall K,L \geq 0 , \tag{4.66}$$

$$F(0,0) = 0 , \tag{4.67}$$

$$\text{а) } \frac{\partial F}{\partial K}(K,L) > 0, \ \text{ б) } \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) > 0; \ \ \forall K,L > 0 , \tag{4.68}$$

$$\text{а) } \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K,L) < 0, \ \text{ б) } \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K,L) < 0; \ \ \forall K,L > 0 , \tag{4.69}$$

$$\text{а) } \lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K}(K,L) = +\infty, \ \text{ б) } \lim_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = +\infty, \ \ \forall K,L > 0 \tag{4.70}$$

$$\text{а) } \lim_{K \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial K}(K,L) = 0, \ \text{ б) } \lim_{L \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = 0, \ \ \forall K,L > 0 \tag{4.71}$$

Определение 4.1. *Если производственная функция* F (K, L) *является однородной, то есть,*

$$F(tK,tL) = t^{\mu} F(K,L), \ \ \forall t > 0 , \tag{4.72}$$

то степень однородности μ *называется* ***коэффициентом отдачи от расширения масштаба производства.***

При этом в случае, если $0 < \mu < 1$, *то говорят об* ***убывающей отдаче****, при* $\mu > 1$ *— о* ***возрастающей отдаче****, а при* $\mu = 1$ *—* ***о постоянной отдаче.***

Напомним, то любая однородная функция удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial F}{\partial K}K+\frac{\partial F}{\partial L}L=\mu F\,, \tag{4.73}$$

называемому ***формулой Эйлера.***

В макроэкономике наибольшее распространение получили производственные функции с *постоянной отдачей*, то есть *линейно-однородные функции.*

Пусть $F(K,\ L)$ — линейно-однородная производственная функция

$$F(tK,tL)=tF(K,L)\,,\ \ \forall t>0\,. \tag{4.74}$$

Обозначим через q производительность труда:

$$q=\frac{F}{L}\,. \tag{4.75}$$

Тогда в силу (4.74) имеем

$$q=\frac{F(K,L)}{L}=F\left(\frac{K}{L},1\right)=F(k,1)\,. \tag{4.76}$$

Таким образом,

$$q=f(k)\,, \tag{4.77}$$

где $k=K/L$ — ***фондовооруженность,*** а

$$f(k)=F(k,1)\,. \tag{4.78}$$

Замечание 4.4. Функция $f(k)$ на основании (4.66)–(4.71) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$f(k)\geq 0, \tag{4.79}$$

$$\frac{df}{dk}(k)>0\,, \tag{4.80}$$

$$\frac{d^2f}{dk^2}(k)<0\,, \tag{4.81}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{df}{dk}(k)=+\infty\,, \tag{4.82}$$

$$\lim_{k\to +\infty}\frac{df}{dk}(k)=0\,. \tag{4.83}$$

4.5.2. Уравнение неоклассического роста

В данной модели мы будем предполагать:

1) национальный доход задаётся при помощи линейно однородной неоклассической производственно функции $Y = F(K, L)$;

2) происходит естественный прирост трудовых ресурсов, т.е.

$$L' = \sigma L; \tag{4.84}$$

3) инвестиции направлены как на увеличение производственных фондов, так и на амортизацию, т.е.

$$I = K' + \delta K\ , \tag{4.85}$$

где δ – норма амортизации.

Пусть υ – норма инвестиций (т.е. $I = \upsilon Y$), тогда в силу (4.85) имеем:

$$K' = \upsilon Y - \delta K. \tag{4.86}$$

Из определения фондовооруженности вытекает, что

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K'L - KL'}{L^2}\ .$$

Подставляя в это равенство значения для L' и K' из (4.84) и (4.86), находим

$$k' = \frac{(\upsilon Y - \delta K)L - \sigma LK}{L^2}\ ,$$

$$k' = \frac{\upsilon Y}{L} - (\delta + \sigma)k.$$

Учитывая, что $\dfrac{Y}{L} = f(k)$, окончательно получаем

$$k' = \upsilon f(k) - \omega k\ , \tag{4.87}$$

где $\omega = \delta + \sigma$.

Уравнение (4.87) называется ***уравнением Солоу неоклассического роста.*** Он представляет собой автономное уравнение первого порядка.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение (4.87) в предположении, что производственная функция является функцией Кобба-Дугласа:

$$F(K,L)=\sqrt{KL}\,. \tag{4.88}$$

Из (4.88) следует, что

$$f(k)=\sqrt{k}\,, \tag{4.89}$$

и уравнение (4.88) принимает вид:

$$k'=\upsilon\sqrt{k}-\omega k. \tag{4.90}$$

Разделяя переменные, получаем при $\upsilon\sqrt{k}-\omega k\neq 0$

$$\frac{dk}{\sqrt{k}(\upsilon-\omega\sqrt{k})}=dt. \tag{4.91}$$

Сделав замену

$$z=\upsilon-\omega\sqrt{k}\,,$$

имеем

$$dz=-\frac{\omega dt}{2\sqrt{k}}\,.$$

В силу этого уравнение (4.91) приводится к виду

$$\frac{2dz}{-\omega z}=dt. \tag{4.92}$$

Разделяя переменные

$$\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{\omega dt}{2}\,, \tag{4.93}$$

получаем

$$z=Ce^{-\frac{\omega t}{2}}\,,$$

и

$$k=\left(\frac{\nu}{\omega}-Ce^{-\frac{\omega t}{2}}\right)^2;\;\; C\neq 0\,. \tag{4.94}$$

Кроме этого семейства решений, у уравнения (4.90) существуют два стационарных решения

$$k=\frac{\nu}{\omega}\,, \tag{4.95}$$

$$k=0\,. \tag{4.96}$$

4.5.3. Стационарные кривые уравнения Солоу

В *Примере 4.1* было установлено, что у уравнения Солоу могут быть стационарные решения. Покажем, что в и общем случае при $k > 0$ у уравнения Солоу существует единственное стационарное решение.

Рассмотрим уравнение

$$vf(k) - \omega k = 0. \tag{4.96}$$

Преобразуем его к виду

$$\varphi(k) = \frac{\omega}{\nu}, \tag{4.97}$$

где $\varphi(k) = \dfrac{f(k)}{k}$. Из (4.81), (4.82) на основании правила Лопиталя следует:

$$\lim_{k \to 0} \varphi(k) = \lim_{k \to 0} f(k) = +\infty, \tag{4.98}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi(k) = \lim_{k \to +\infty} f(k) = 0. \tag{4.99}$$

Отсюда в силу непрерывности $\varphi(k)$ следует существование решения уравнения (4.97)

$$k = k^*. \tag{4.100}$$

и соответствующего стационарного решения уравнения Солоу.

Покажем, что это решение единственно, если $k > 0$. Для этого докажем, что $\varphi(k)$ убывает при всех $k > 0$. Имеем,

$$\frac{d\varphi}{dk}(k) = \frac{\dfrac{df}{dk}(k)k - f(k)}{k^2}. \tag{4.101}$$

Дифференцируя соотношение (4.78) с учётом правила дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{df}{dk}(k) = \frac{\partial F}{\partial K}(k,1). \tag{4.102}$$

Формула Эйлера (4.73) для линейно-однородной функции ($\mu = 1$) принимает вид:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K,L)K + \frac{\partial F}{\partial L}(K,L)L = F(K,L). \tag{4.103}$$

Полагая в (4.103) $K = k$, $L = 1$ с учётом (4.78), (4.102), находим

$$\frac{\partial f}{\partial k}(k)k+\frac{\partial F}{\partial L}(k,1)=f(k)\ . \qquad (4.104)$$

Отсюда в силу (4.68) получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial k}(k)k<f(k)\ . \qquad (4.105)$$

Из (4.101) на основании (4.105) получаем

$$\frac{d\varphi}{dk}<0\ . \qquad (4.106)$$

Следовательно, $\varphi(x)$ убывает, и стационарное решение единственно при всех $k > 0$.

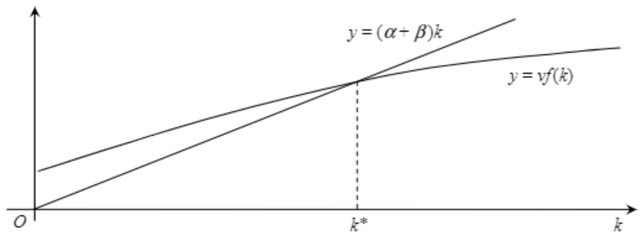


Рис. 4.8

Таким образом,

если $0<k(0)<k^*$, *то интегральная кривая* $k = k(t)$ *возрастает, асимптотически приближаясь к стационарному решению* $k(t)=k^*$;

если $k(0)>k^*$, *то интегральная кривая* $k = k(t)$ *убывает, асимптотически приближаясь к стационарному решению* $k(t)=k^*$;

если $k(0)=k^*$, *то* $k(t)=k^*$.

Замечание 4.5. Если $f(0) = 0$ (что, например, имеет место для функции Кобба-Дугласа), то у уравнения Солоу есть ещё одно стационарное решение $k=0$.

Замечание 4.6. Продифференцируем по t уравнение (4.87), имеем

$$k''=\left(v\frac{df}{dk}(k)-\omega\right)k'\ . \qquad (4.107)$$

Следовательно, если $k''=0$, то либо

$$k'=0 \tag{4.108}$$

(что влечёт $k=k^*$, если $k>0$), либо

$$\upsilon\frac{df}{dk}(k)=\omega\,. \tag{4.109}$$

Так как функция $\frac{df}{dk}(k)$ непрерывна, монотонно убывает и удовлетворяет условиям (4.81), (4.82), то существует такое k_1, что

$$f'(k_1)=\frac{\omega}{\nu}\,. \tag{4.110}$$

Следовательно, если, $0<k<k_1$, то $k''>0$; если $k_1<k<k^*$, то $k''<0$; если $k>k^*$, то $k''>0$. Ввиду этого график интегральной кривой уравнения (4.87) (при $0<k<k^*$) напоминает логистическую кривую (рис. 4.9).

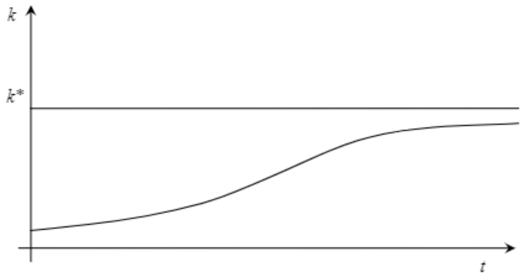


Рис. 4.9

4.5.4. «Золотое» правило накопления

Рассмотрим балансовое соотношение

$$Y(t)=C(t)+I(t).$$

Выразим из него потребление $C(t)$ с учётом того, что $I(t)=\nu Y(t)$

$$C(t)=(1-\nu)\,Y(t). \tag{4.111}$$

Выясним, при какой норме инвестиций ν на стационарной кривой достигается максимальное потребление на единицу трудовых ресурсов. Другими словами, найдём максимум функции

$$\varphi(\nu) = (1-\nu)f(k^*(\nu)) \qquad (4.112)$$

при условии

$$\upsilon f(k^*) = \omega k^* . \qquad (4.113)$$

Имеем

$$\varphi(\nu) = (1-\nu)f(k^*(\nu)) = f(k^*(\nu)) - \nu f(k^*(\nu) \qquad (4.114)$$

$$\varphi(\nu) = f(k^*(\nu)) - \omega k^*(\nu) \qquad (4.115)$$

Дифференцируя (4.114) по ν, получаем

$$\frac{d\varphi}{d\nu}(\nu) = \left(\frac{df}{dk}(k^*(\nu)) - \omega\right)\frac{dk^*}{d\nu}(\nu) . \qquad (4.116)$$

Приравнивая правую часть этого равенства к нулю, находим

$$\frac{df}{dk}(k^*) = \omega . \qquad (4.117)$$

Соотношение (4.113) в силу (4.116) принимает вид:

$$\upsilon f(k^*) = k^* \cdot \frac{df}{dk}(k^*) . \qquad (4.118)$$

В терминах функции полезности это равенство выглядит следующим образом:

$$\upsilon F = K \cdot \frac{dF}{dK} . \qquad (4.119)$$

Напомним, что величина $\frac{dF}{dK}$ называется ***предельной полезностью капитала*** (***предельной фондоотдачей***). Она показывает в малом величину дополнительно получаемого дохода на единицу дополнительно затрачиваемого капитала. Если экономика функционирует в оптимальном режиме, то

$$\frac{dF}{dK} = r , \qquad (4.120)$$

где r — *реальная цена капитала* (*реальная рентная плата*).

Действительно, так как в силу (4.68) F — возрастающая функция от K, а $\frac{dF}{dK}$ в силу (4.69) — убывающая, то увеличивать капитал K имеет смысл лишь до тех пор, пока не будет достигнуто равенство (4.119). Дальнейшее увеличение K приведёт к тому, что плата за дополнительную единицу капитала будет выше получаемого дополнительного дохода.

С учётом (4.119) соотношение (4.118) принимает вид

$$I = K \cdot r . \qquad (4.120)$$

Таким образом, мы получили «золотое» правило накопления: *инвестиции должны быть равны доходу от капитала.*

Пример 4.2. Рассмотрим «золотое» правило накопления применительно к экономики с национальным доходом, задаваемым производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$F(K;L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} . \qquad (4.121)$$

Имеем

$$f(k) = k^{\alpha}, \quad f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} , \qquad (4.122)$$

В силу этого уравнение (4.117) принимает вид:

$$v(k^*)^{\alpha} = \alpha (k^*)^{\alpha-1} k^* .$$

Следовательно,

$$v = \alpha .$$

Таким образом, в случае производственной функции Кобба-Дугласа, для достижения максимального душевого дохода норма инвестиций ν должна быть равна α — эластичности национального дохода по капиталу.

Вопросы и упражнения

1. Выведите уравнение естественного роста. В каких случаях и для описания каких процессов оно используются?
2. Что такое логиститеская кривая? Какими свойствами она обладает?
3. Каковы основные предположения модели роста Харрода–Домара. Исследуйте случай постоянного потребления и случай потребления при постоянном темпе.
4. Исследуйте динамическую модель рынка Вальраса в предположении линейности функций спроса и предложения.
5. Выведите уравнение динамической модели Кейнса с акселерацией.

6. Проанализируйте динамическую модель Кейнса с запаздыванием.

7. Выведите уравнения неоклассического роста Солоу.

8. Опишите свойства стационарных кривых уравнения Солоу.

9. В чём заключается «золотое правило накопления»?

10. Какова специфика «золотого правила накопления»в случае экономики, определяемой функцией Кобба-Дугласа.

11. Найти динамику национального дохода $Y(t)$ в модели Харрода-Домара, удовлетворяющего начальному условию: $Y(0)=300$, если фактор акселерации $B=0{,}25$, потребление $C(t)=150e^{2t}$.

12. Найти динамику национального дохода $Y(t)$ в модели Харрода-Домара, удовлетворяющего начальному условию: $Y(0)=100$, если фактор акселерации $B=0{,}25$, потребление.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

5.1. Модель делового цикла Самуэльсона — Хикса

5.1.1. Уравнение Самуэльсона — Хикса

Данная модель основывается на уже упоминавшемся в предыдущей главе *принципе акселерации*, то есть на предположении, что объемы инвестирования прямо пропорциональны приросту национального дохода. Данное предположение характеризуется уравнением

$$I(t) = B\big(Y(t-1) - Y(t-2)\big), \tag{5.1}$$

где коэффициент $B > 0$ — фактор акселерации, $I(t)$ – величина инвестиций в период t, $Y(t-1)$, $Y(t-2)$ – величины национального дохода соответственно в $(t-1)$-м и $(t-2)$-м периодах. Предполагается также, что потребление на данном этапе зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе, т.е.

$$C(t) = aY(t-1) + C_0, \tag{5.2}$$

где $C_0 > 0$ — автономное потребление, а a — предельная склонность к потреблению ($0 < a < 1$).

Условие равенства спроса и предложения имеет вид

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{5.3}$$

Подставляя в (5.3) выражение для $I(t)$ из (5.1) и выражение для $C(t)$ из (5.2), находим

$$Y(t)=(a+B)Y(t-1)-BY(t-2)+C_0. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) известно как *уравнение Самуэльсона-Хикса*. Оно представляет собой линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специально правой частью.

Найдём частное решение уравнения (5.4) при помощи метода неопределённых коэффициентов. Будем искать решение вида

$$Y(t)=Y^*, \tag{5.5}$$

где Y^* — некоторая постоянная. Подставляя (5.5) в (5.4), имеем

$$Y^*=(a+B)Y^*-BY^*+C_0,$$

откуда

$$Y^*=C_0(1-a)^{-1}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь соответствующее однородное уравнение

$$Y(t)-(a+B)Y(t-1)+BY(t-2)=0\ . \tag{5.7}$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2-(a+B)\lambda+B=0\ . \tag{5.8}$$

В зависимости от дискриминанта

$$D=(a+B)^2-4B\ . \tag{5.9}$$

возможны три случая.

5.1.2. Случай различных действительных корней

Пусть $D>0$, или

$$(a+B)^2-4B>0\ ; \tag{5.10}$$

то есть

$$a+B>2\sqrt{B}\ . \tag{5.11}$$

Тогда характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня:

$$\lambda_1=\frac{a+B-\sqrt{(a+B)^2-4B}}{2}\ , \tag{5.12}$$

$$\lambda_2 = \frac{a+B+\sqrt{(a+B)^2-4B}}{2}. \tag{5.13}$$

Общее решение уравнения (5.4) имеет вид:

$$Y(t) = \frac{C_0}{1-a} + C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t, \tag{5.14}$$

Обозначим

$$g(\lambda) = \lambda^2 - (a+B)\lambda + B. \tag{5.15}$$

Исследуем расположение корней параболы $g(\lambda)$. Имеем

$$\begin{cases} g(0) = B > 0, \\ \dfrac{a+B}{2} > 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Следовательно, оба корня характеристического уравнения положительны:

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0. \tag{5.17}$$

Поскольку

$$g(1) = 1 - a > 0, \tag{5.18}$$

то корни параболы не могут располагаться по разные стороны от 1. Они либо оба находятся правее 1 ($\lambda_2 > \lambda_1 > 1$), если вершина параболы находится правее 1, то есть

$$\frac{a+B}{2} > 1, \tag{5.19}$$

либо левее 1 ($\lambda_1 < \lambda_2 < 1$), если вершина параболы находится левее 1, то есть

$$\frac{a+B}{2} < 1. \tag{5.20}$$

Итак, если имеет место условие (5.19), то решение уравнения (5.4) будет *удаляться от своего равновесного состояния*, если же имеет место условие (5.20), то решение уравнения (5.4) будет *приближаться к равновесному состоянию*. Так будет происходить, в частности, если $B < 1$.

5.1.3. Случай совпадающих корней

Пусть $D=0$, то есть

$$(a+B)^2-4B=0\,, \tag{5.21}$$

то есть

$$a+B=2\sqrt{B}\,. \tag{5.22}$$

Тогда характеристическое уравнение имеет единственный корень:

$$\lambda=\frac{a+B}{2}>0\,. \tag{5.23}$$

Общее решение уравнения (5.4) имеет вид:

$$Y(t)=\frac{C_0}{1-a}+C_1\lambda^t+C_2 n\lambda^t\,. \tag{5.24}$$

Здесь имеет место ситуация, аналогичная рассмотренной нами в предыдущем пункте:
если выполнено условие (5.19), что равносильно в силу (5.22)

$$B>1\,,$$

то $\lambda>1$, и решение уравнения (5.4) будет *удаляться от своего равновесного состояния*;
если же выполнено условие (5.20), что равносильно соотношению

$$B<1\,.$$

то $\lambda<1$, и решение уравнения (5.4) *будет приближаться к равновесному состоянию*.

Случай

$$\frac{a+B}{2}=1 \tag{5.25}$$

невозможен, так как он влечёт $B=1$, а это на основании (5.22) даёт $a=1$.

5.1.4. Случай комплексных корней

Пусть $D<0$, то есть

$$(a+B)^2-4B<0\,, \tag{5.26}$$

или

$$a+B<2\sqrt{B}\,. \tag{5.27}$$

Тогда характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$\lambda_1 = \frac{a+B-i\sqrt{4B-(a+B)^2}}{2}, \tag{5.28}$$

$$\lambda_2 = \frac{a+B+i\sqrt{4B-(a+B)^2}}{2}. \tag{5.29}$$

Представим эти корни в тригонометрической форме

$$\lambda_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \lambda_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

Тогда общее решение уравнения (5.4) имеет вид

$$Y(t) = \frac{C_0}{1-a} + r^t(C_1\cos t\varphi + C_2\sin t\varphi).$$

и носит колебательный характер.

Вычислим модуль собственных значений, имеем

$$r = \sqrt{\frac{(a+B)^2 + 4B - (a+B)^2}{4}} = \sqrt{B}. \tag{5.30}$$

Таким образом, если $B>1$, то решение уравнения (5.4) будет *колебаться вокруг своего равновесного состояния с возрастающей амплитудой*; если выполнено условие $B<1$, то решение *колебаться вокруг своего равновесного состояния с затухающей амплитудой*; если $B=1$, то будут иметь место *циклические колебания с постоянной амплитудой вокруг равновесного состояния*.

Пример. Рассмотрим модель Самуэльсона – Хикса при условии, что $a=0{,}5$; $B=0{,}5$; $C_0=4$. В этом случае уравнение (5.4) принимает вид:

$$Y(t) - Y(t-1) + 0{,}5Y(t-2) = 4.$$

Его частным решением будет

$$Y(t) = \frac{4}{1-0{,}5} = 8.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda + 0{,}5 = 0.$$

Имеем

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, общим решением соответствующего однородного уравнения является

$$\tilde{Y}(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\left(C_1\cos\frac{t\pi}{4}+C_2\sin\frac{t\pi}{4}\right).$$

Следовательно, общим решением уравнения будет

$$Y(t)=8+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\left(C_1\cos\frac{t\pi}{4}+C_2\sin\frac{t\pi}{4}\right).$$

Интегральные кривые будут колебаться с затухающей амплитудой вокруг стационарного решения $Y(t)=8$.

5.2. Паутинная модель рынка

При помощи разностных уравнений можно дать трактовку процессов сходимости и расходимости в *паутинных моделях рынка*. Для упрощения выкладок предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями, но при этом спрос зависит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е.

$$d_t = a - bp_t,\ \ s_t = m + np_{t-1}, \tag{5.30}$$

где a, b, m, n — положительные действительные числа.

Таким образом, если $s_t = d_t$, то

$$a - m = bp_t + np_{t-1}. \tag{5.31}$$

Уравнение (5.31) представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. У него существует стационарное равновесное решение

$$p(t) \equiv p^*(= \text{const}). \tag{5.32}$$

Действительно, подставив выражение для p_t из формулы (5.32) в (5.31) находим

$$p^* = \frac{a-m}{b+n}. \tag{5.33}$$

Решая характеристическое уравнение

$$b\lambda + n = 0,$$

получаем $\lambda = -\frac{n}{b}$. Следовательно, общим решением уравнения (5.31) будет

$$p_t = C_1\left(-\frac{n}{b}\right)^t + \frac{a-m}{b+n}. \qquad (5.34)$$

Таким образом, из (5.34) вытекает, что динамика цен носит колебательный характер. При этом если $n<b$, то последовательность цен $\{p_t\}$ будет *сходиться к равновесному состоянию*, если $n>b$, то с течением времени последовательность $\{p_t\}$ будет *удаляться от равновесного состояния*, если же $n=b$, то будут иметь место *циклические колебания цены относительно равновесного состояния*.

Вопросы и упражнения

1. Докажите критерий сходимости и расходимости последовательности цен в паутинной модели рынка.

2. Сформулируйте основные предположения модели Самуэльсона — Хикса, выведите и проанализируйте разностное уравнение, описывающее эту модель.

3. Какие виды динамики возможны в модели Самуэльсона — Хикса в случае действительных корней?

4. Какие виды динамики возможны в модели Самуэльсона — Хикса в случае совпадающих корней?

5. Какие виды динамики возможны в модели Самуэльсона — Хикса в случае комплексных корней?

6. Найти динамику национального дохода Y_t в модели Самуэльсона-Хикса, удовлетворяющего начальным условиям: $Y_0 = 200$, $Y_1 = 300$, если предельная склонность потреблению $a = 0{,}25$, фактор акселерации $B = 0{,}75$, автономное потребление $C_0 = 150$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трудно переоценить роль математики в системе образования экономиста. Современные экономическая теория и экономическая практика стали настолько сложны, что сделало невозможным их функционирование без использования математического аппарата. О роли математики в экономике говорит тот факт, что за последние 40 лет практически все Нобелевские премии по экономике вручались за работы, широко использующие математические методы. Математика прочно вошла во все разделы экономического знания. При её помощи строятся прогнозы, выявляются закономерности и взаимосвязи, оцениваются величины. Однако математика — это не только мощный инструмент, но и язык общения современного экономиста. Математические термины «функция», «матрица», «производная», «корреляция», «эластичность» и многие другие прочно вошли в экономическую лексику и стали частью экономической культуры.

Автор данного учебного пособия выражает надежду, что пособие будет полезным и внесёт определённую лепту в формировании общей системы знаний и экономико-математической культуры современного экономиста.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Определение 1. ***Декартовым квадратом*** *непустого множества X называется множество, обозначаемое $X \times X$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары (x, y), где $x, y \in X$.*

Так, например, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Определение 2. ***Бинарным отношением*** *на множестве X называется подмножество R декартова квадрата $X \times X$.*

Если $(x,y) \in R$, то говорят, что ***x находится в отношении R к y.*** *и обозначают* $\boldsymbol{xRy}$.

Так, например, задание отношение «$x \leq y$» на множестве действительных чисел равносильно заданию множества точек на плоскости, расположенных не ниже прямой $x = y$.

Определение 3. *Отношение R на множестве X называется* ***рефлексивным****, если $\forall\, x \in X$ имеет место xRx.*

Рефлексивными являются следующие отношения:

1) отношения равенства «$=$» и нестрого неравенства «$\leq$»;
2) отношение параллельности;
3) отношение подобия геометрических фигур;
4) отношение делимости на множестве целых чисел;
5) отношение «знать о существовании».

Не являются *рефлексивными* отношения:

1) отношение строгого неравенства «$<$»;
2) отношения «быть братом», «быть мужем».

Определение 4. *Отношение R на множестве X называется* ***антирефлексивным (иррефлексивным)****, если условие xRx не выполняется $\forall\ x \in X$.*

Антирефлексивными являются следующие отношения:

1) отношения неравенства «$\neq$»;
2) отношение строго неравенства «$<$»;
3) отношение перпендикулярности;
4) отношения «быть отцом», «быть потомком».

Определение 5. *Отношение R на множестве X называется* ***симметричным****, если $\forall\ x, y \in X,\ xRy \Rightarrow yRx$.*

Симметричными являются следующие отношения:

1) отношение равенства «$=$»;
2) отношение параллельности;
3) отношение подобия геометрических фигур;
4) отношение симметрии геометрических фигур;
5) отношения «быть другом», «быть родственником», «состоять в браке».

Определение 6. *Отношение R на множестве X называется* ***антисимметричным****, если*

$$\forall\ x, y \in X, xRy \wedge yRx \Rightarrow y = x.$$

Антисимметричными являются следующие отношения:

1) отношение нестрого неравенства;
2) отношение делимости на множестве целых чисел;
3) отношение нестрого включения «$\subseteq$» для множеств.

Определение 7. *Отношение R на множестве X называется* ***асимметричным****, если $\forall x, y \in X$, из xRy вытекает, что yRx не имеет места.*

То есть отношение R является *асимметричным*, если невозможно одновременное выполнение условий xRy и yRx.

Асимметричными являются следующие отношения:

1) отношение строго неравенства на множестве действительных чисел;
2) отношение нестрого включения «$\subseteq$» для множеств;
3) отношения «быть женой», «быть мужем».

Теорема 1. Всякое асимметричное отношение антирефлексивно.

Доказательство. Пусть R — асимметрично, тогда

$$\forall x, y \in X, x\, R\, y \Rightarrow \neg\, (y\, R\, x).$$

Полагая $x = y$, имеем

$$\forall x \in X,\; x\, R\, x \Rightarrow \neg\, (x\, R\, x).$$

Мы получили противоречие. Следовательно, $\forall x \in X$, xRx не выполняется, R — антирефлексивно.

Теорема 2. Всякое антисимметричное и антирефлексивное отношение асимметрично.

Доказательство. Предположим противное, что $\forall x,\ y \in X$ имеет место $xRy \wedge yRx$. Тогда в силу антисимметричности получаем $y = x$. Следовательно, имеет место xRx, что противоречит антирефлексивности. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 8. *Отношение R на множестве X называется* ***транзитивным****, если*

$$\forall x, y, z \in X,\; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

Транзитивными являются следующие отношения:

1) отношения равенства «=»;

2) отношение нестрого (строгого) неравенства;

3) отношение нестрого (строгого) включения для множеств;

4) отношение параллельности;

5) отношение подобия геометрических фигур;

6) отношение следования.

Теорема 3. *Транзитивное антирефлексивное отношение является асимметричным.*

Доказательство. Предположим противное, что $\forall x,\ y \in X$ имеет место $xRy \wedge yRx$. Отсюда в силу транзитивности следует xRx, что противоречит антирефлексивности. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 9. *Отношение R на множестве X называется* ***полным****, если* $\forall x, y \in X$ *имеет место либо* xRy, *либо* yRx.

Полнота означает сопоставимость по заданному отношению любых двух элементов множества. *Полным* является, например, отношения: нестрого неравенства «$\leq$» на множестве действительных чисел.

Теорема 4. *Всякое полное отношение является рефлексивным.*

Доказательство. Пусть R является полным, тогда $\forall x, y \in X$ имеет место xRy или yRx. Полагая в этих соотношениях $x = y$, получаем, что $\forall x \in X$ выполнено xRx. Следовательно, R — рефлексивно.■

Определение 10. *Отношение* $\sim$ *на множестве* X *называется* ***отношением эквивалентности****, если оно*

а) рефлексивно: $\forall x \in X \ \ x \sim x$;

б) транзитивно: $\forall x, y, z \in X \ \ x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$;

в) симметрично: $\forall x, y \in X, x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Примерами *отношения эквивалентности* служат отношение подобия и отношение параллельности в геометрии.

Определение 11. *Подмножество*

$$C_x = \{x' \in X : \ x' \sim x\}$$

всех элементов множества X *эквивалентных* x *называется* ***классом эквивалентности*** *элемента* x, *а сам* x *называется* ***представителем*** *данного класса эквивалентности.*

Пример 1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ − функция, заданная на множестве X. Тогда на X можно ввести отношение эквивалентности, полагая:

$$x \sim y \text{, если } f(x) = f(y).$$

Очевидно, что все аксиомы отношения эквивалентности выполнены. Классы эквивалентности для этого отношения будут совпадать с множествами уровня функции f.

Теорема 5. *Каждый класс эквивалентности однозначно определяется своим представителем, то есть*

$$C_x = C_y \Leftrightarrow x \sim y .$$

Доказательство. 1) Пусть $C_x = C_y$, тогда $x \in C_y \Rightarrow x \sim y$.

2) Обратно, пусть $x \sim y$ и $z \in C_y$, тогда $z \sim y$ и в силу симметричности и транзитивности: $z \sim x$. Следовательно, $z \in C_x$ а, значит, $C_y \subseteq C_x$.

Подобным образом доказывается включение $C_y \subseteq C_x$, а значит, $C_x = C_y$. ■

Теорема 6. *Если два класса эквивалентности пересекаются, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть $C_x \cap C_y \neq \varnothing$. Тогда существует $z \in C_x \cap C_y$. Имеем $z \in C_x \Rightarrow z \sim x$; $z \in C_y \Rightarrow z \sim y$. В силу симметричности и транзитивности: $x \sim y$. На основании Теоремы 1 получаем $C_x = C_y$. ■

Замечание 1. Из доказанных выше Теоремы 5 и Теоремы 6 вытекает, что если на множестве X задано отношения эквивалентности, то X представляет собой объединение непересекающихся классов эквивалентности: $X = \bigcup_{x \in X} C_x$.

Приложение 2

Дифференциальные уравнения

Основные понятия и примеры

Определение 1. *Уравнение, связывающее независимые переменные с неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка называется* ***дифференциальным уравнением.***

Например, дифференциальными являются следующие уравнения:

$$y' + 4y = x^2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Определение 2. ***Порядком*** *дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.*

Приведенные выше дифференциальные уравнения (1) и (2) являются уравнениями соответственно первого и второго порядка.

Определение 3. *Дифференциальное уравнение называется* ***обыкновенным,*** *если неизвестная функция зависит от одной переменной. Если же в уравнение входят частные производные неизвестной функции по нескольким независимым переменным, то уравнение называется* ***дифференциальным уравнением в частных производных.***

Так, уравнение (1) является примером обыкновенного дифференциального уравнения, а уравнение (2) — примером дифференциального уравнения в частных производных.

Любое (обыкновенное) дифференциальное уравнение n-го порядка может быть записано в виде

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (3)$$

где F – некоторая заданная функция, x – независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция, а $y'(x), ..., y^{(n)}(x)$ — ее производные.

Определение 4. ***Решением*** *дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, такая, что ее подстановка в это уравнение обращает его в тождество.*

Определение 5. *График решения дифференциального уравнения называется* ***интегральной кривой***.

Определение 6. *Решение дифференциального уравнения, заданное неявно соотношением*

$$\Phi(x, y) = 0,$$

называется ***интегралом*** *этого уравнения.*

Пример 1. Рассмотрим дифференциального уравнения

$$y' = 2x.$$

Его решением, как нетрудно убедиться, является функция

$$y = x^2.$$

Этому решению соответствует интеграл

$$y - x^2 = 0$$

Очевидно, что решением этого уравнения также будет и любая функция вида

$$y(x) = x^2 + C, \qquad (4)$$

где C — произвольная постоянная, что говорит о том, что данное уравнения имеет бесконечно много решений. Более того, формулой (4) определяются все решения данного уравнения, или, как говорят, задается *общее решение* уравнения. Отметим, что общее решение зависит от произвольной постоянной C. Придавая ей определенные числовые значения, мы будем получать конкретные решения, или, как принято говорить *частные решения*.

Пример 2. Рассмотрим в качестве ещё одного примера дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = 6x. \tag{5}$$

Имеем

$$y = 3x^2 + C_1$$

и далее

$$y = x^3 + C_1 x + C_2, \tag{6}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Очевидно, что при любых значениях C_1 и C_2 полученная функция y будет решением уравнения (5), то есть формула (6) задает общее решение уравнения (5). Заметим, что в данном случае общее решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 (что совпадает с порядком данного уравнения). Придавая постоянным в соотношении (6) конкретные значения, мы будем получать частные решения уравнения (5).

Замечание 1. В дальнейшем понятия *общего* и *частного решения* дифференциального уравнения будут уточнены. Однако ряд важных обстоятельств можно отметить уже сейчас, исходя из рассмотренных выше примеров:

1) *дифференциальное уравнение может иметь бесконечно много решений*;

2) *общее решение дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных*;

3) *частные решения получаются из общего, если указанным постоянным придаются конкретные значения.*

Замечание 2. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения принято называть ***интегрированием*** этого уравнения.

Замечание 3 В теории дифференциальных уравнений под выражением вида $\int f(x)dx$ понимают не множество всех первообразных функции $f(x)$, а какую-либо одну фиксированную первообразную. Само выражение $\int f(x)dx$ называют ***квадратурой*** функции $f(x)$, а найти решение дифференциального уравнение ***в квадратурах*** означает выразить его решение в виде конечного числа квадратур от элементарных функций.

К сожалению, проинтегрировать в квадратурах можно лишь сравнительно небольшой класс уравнений. Поэтому, наряду с методами отыскания точных решений дифференциальных уравнений, большое значение для практики имеют методы построения приближённых решений (так называемые *численные методы*) и методы *качественного анализа*, позволяющие описать поведение интегральных кривых без получения их уравнений в явном виде.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{7}$$

Определение 7. *Если уравнение* (7) *можно разрешить относительно y', то есть записать в виде*

$$y' = f(x, y), \tag{8}$$

то говорят, что уравнение записано в ***нормальной форме*** *(или в **форме Коши**).*

Определение 8. *Уравнение* вида

$$N(x, y)dx + M(x, y)dy = 0, \tag{9}$$

*называется **уравнением в дифференциалах** или **симметричной формой** дифференциального уравнения первого порядка.*

Название *симметричная форма* обусловлено тем, что в уравнении (9) не обозначено явным образом, какая из переменных является искомой функцией. Поэтому в зависимости от ситуации в качестве таковой может быть выбрана любая из переменных.

Уравнение в *нормальной форме* (8) является частным случаем *уравнения в дифференциалах* (9). Эти уравнения равносильны (то есть имеют одинаковые решения) в области, где выполнено условие $M(x,y) \neq 0$.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$e^y y' - xy = 0.$$

Его *симметричная* и *нормальная* формы имеют соответственно вид:

$$e^y \mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x = 0\,.$$

$$y' = xy\, e^{-y}.$$

Задача Коши

Как уже отмечалось выше, у большинства дифференциальных уравнений существует бесконечно много решений. Чтобы из этого множества выделить какое-то конкретное решение, необходимо указать дополнительное условие. Для уравнения первого порядка в нормальной форме чаще всего это условие задается в следующем виде:

$$y(x_0) = y_0. \tag{10}$$

Определение 9. *Соотношение* (10) *называется* ***начальным условием****, а числа* x_0 *и* y_0 *—* ***начальными данными.***

Определение 10. ***Задачей Коши*** *для дифференциального уравнения*

$$y' = f(x, y),$$

называется задача о нахождении решений, удовлетворяющих начальному условию (10).

Замечание 4. С геометрической точки зрения решение *задачи Коши* равносильно нахождению интегральной кривой, проходящей через заданную точку.

Пример 4. Найдём решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \cos x; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Имеем

$$y(x) = \sin x + C.$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия, находим

$$y(0) = 0 + C = 1.$$

Следовательно, $C = 1$. Поэтому функция

$$y(x) = \sin x + 1.$$

является решением исходной задачи Коши .

Рассмотренная выше задача Коши имеет единственное решение. В общем случае задача Коши может иметь несколько решений, бесконечно много решений или не иметь решений. Условия, при которых решение задачи Коши существует и единственно, формулируются в следующей ***теореме Коши.***

Теорема 1. (*о существовании и единственности решения задачи Коши.* *Если в некоторой окрестности точки*

(x_0, y_0) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет ограниченную по модулю частную производную f_y', то существует такая окрестность точки (x_0, y_0), в которой задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{11}$$

имеет решение, притом единственное.

Замечание 5. Условия теоремы 1 будут выполнены, если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную f_y'.

Общее и частное решения

На основании теоремы Коши мы можем теперь сформулировать понятия общего и частного решений для дифференциального уравнения первого порядка, записанного в нормальной форме.

Определение 11. *Если задача Коши*

$$\begin{cases} y' = f(x,y); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

имеет единственное решение, то это решение называется ***частным решением*** *уравнения $y' = f(x,y)$.*

Определение 12. *Множество всех частных решений дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ называется его* ***общим решением.***

Рассмотрим формы задания общего решения. Пусть G — область, принадлежащая области определения функции $f(x, y)$, в которой выполнены условия теоремы Коши. Тогда для любой точки (x_0, y_0) из G существует единственное частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Тем самым определена функция вида

$$y = \psi(x, x_0, y_0), \tag{12}$$

называемая ***общим решением уравнения $y' = f(x,y)$ в форме Коши.***

Замечание 6. Функция $\psi(x, x_0, y_0)$ является непрерывной и, более того, дифференцируемой функцией своих.

Параметры x_0, и y_0, входящие в общее решение в форме Коши, имеют простой геометрический смысл: они являются координатами точки, через которую проходит интегральная кривая, соответствующая частному решению. Однако эти параметры не являются независимыми, так как они связаны соотношением $y_0 = \psi(x_0, x_0, y_0)$, Поэтому различным значениям параметров может соответствовать одно и то же частное решение. Так происходит, если точка (x_0, y_0) перемещается по фиксированной интегральной кривой. Возникает вопрос: можно ли задать общее решение при помощи функции, зависящей от одного параметра, так чтобы каждому значению параметра соответствовало единственное частное решение? То есть так, чтобы этот параметр являлся своеобразной «*меткой*» интегральной кривой. Общее решение такого вида мы уже неоднократно встречали выше при разборе различных примеров, однако построить его для произвольных классов уравнений удаётся не всегда.

Определение 13. *Непрерывная функция*

$$y = \varphi(x, C), \tag{13}$$

зависящая от переменной x и параметра C, называется ***общим решением уравнения $y' = f(x,y)$ в стандартной форме****, если при любом значения параметра C она является частным решением этого уравнения, и для любого частного решения $y(x)$ существует единственное значение параметра $C = C_0$ такое, что $y(x) = \varphi(x, C_0)$.*

Рассмотрим взаимосвязь приведенных выше форм задания общего решения. Перейти от *стандартной формы* к *форме Коши* достаточно просто. Как следует из определения 14, для любой интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), существует единственное значение параметра $C = C_0$, другими словами, задана функция

$$C = C_0(x_0, y_0), \tag{14}$$

Подставляя значение параметра C из (14) в (13), получаем

$$y = \varphi(x, C_0(x_0, y_0)) = \psi(x, x_0, y_0).$$

Перейти от *формы Коши* к *стандартной форме* сложнее. Для этого надо найти параметрическую зависимость между y_0 и x_0 вида:

$$\begin{cases} x_0 = x_0(C), \\ y_0 = y_0(C), \end{cases} \qquad (15)$$

такую, чтобы точка (x_0, y_0) при различных значениях C принадлежала различным интегральным кривым и при изменении C побывала на всех интегральных кривых. Другими словами, надо найти кривую, которая бы лежала в области G и пересекала бы все интегральные кривые, имея с каждой из них единственную точку пересечения. В общем случае провести такую кривую можно только локально.

Таким образом, гарантировать существование *общего решения в стандартной форме*, в отличие от *общего решения в форме Коши*, можно только локально, то есть в окрестности некоторой точки. Однако для некоторых классов уравнений (например, *линейных*) задать общее решение в стандартной форме можно и глобально.

Пример 5. Найдём общее решение уравнения

$$y' = y^2. \qquad (16)$$

Заметим, что для функции $f(x, y) = y^2$ условия теоремы Коши выполнены на всей плоскости Oxy. Имеем, при $y \neq 0$:

$$-\frac{y'}{y^2} = -1 \text{, т.е. } \left(\frac{1}{y}\right)' = -1 \text{, поэтому } \frac{1}{y} = -x + C;$$

таким образом, получаем, что

$$y = \frac{1}{C - x}. \qquad (17)$$

Соотношения (17) определяют на плоскости семейство гипербол, расположенных во второй и четвёртой четвертях, с осями $y = 0$ и $x = C$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$y = 0 \qquad (18)$$

также является частным решением данного уравнения, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = 0$.

Таким образом, общее решение уравнения (16) задаётся соотношениями (17), (18). Причем, выражение $y = \dfrac{1}{C - x}$ не является общим решением в *стандартной форме*, так как из него ни при каких значениях параметра C нельзя получить частное решение $y = 0$. Однако в области, где $y > 0$ (или $y < 0$) соотношение (17) является *общим решением в стандартной форме.*

Запишем теперь *общее решение в форме Коши*. Для этого найдём решение задачи Коши, удовлетворяющей начальным условиям

$$y(x_0) = y_0 .$$

Из (17) получаем

$$y_0 = \frac{1}{C - x_0} \qquad (19)$$

Отсюда, при $y_0 \neq 0$, следует

$$C = \frac{1 + y_0 x_0}{y_0} \qquad (20)$$

Подставляя выражение для C из (20) в (19), находим

$$y = \frac{y_0}{y_0(x_0 - x) + 1} . \qquad (21)$$

Заметим, что частное решение $y = 0$ также может быть получено из (21), если положить $y_0 = 0$. Таким образом, соотношение (21) задаёт *общее решение в форме Коши.*

Чтобы перейти от общего решения форме Коши к общему решению *в стандартной форме* необходимо найти кривую, пересекающую все интегральные кривые и имеющую с каждой из них единственную точку пересечения. В качестве такой кривой может быть взята кривая $y_0 = -x_0$, заданная в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x_0 = C; \\ y_0 = -C. \end{cases} \qquad (22)$$

Подставив выражения для x_0 и y_0 из (22) в (21), получим *общее решение в стандартной форме*

$$y = \frac{C}{C(C - x) - 1} . \qquad (23)$$

Общий и частный интеграл

Определение 14. Частное решение дифференциального уравнения, заданное неявно соотношением

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{24}$$

называется ***частным интегралом.***

Определение 15. *Соотношение вида*

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{25}$$

определяющее общее решение дифференциального уравнения $y = \varphi(x, C)$ как неявную функцию, называется ***общим интегралом.***

Из соотношения (25) при помощи выбора параметра C может быть получен любой частный интеграл, то есть может быть получено уравнение любой интегральной кривой.

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{26}$$

Условия теоремы Коши выполнены всюду, за исключением прямой $y = 0$. Из (26) получаем при $y \neq 0$:

$$2yy' = -2x\ ,$$

т.е.

$$(y^2)' = -2x\ ,$$

поэтому

$$y^2 = -x^2 + C^2$$

Таким образом, *общий интеграл* уравнения имеет вид

$$y^2 + x^2 - C^2 = 0.$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Одним из наиболее простых типов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, являются ***уравнения с разделяющимися переменными.*** Это дифференциальные уравнения вида

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \tag{27}$$

где $g(x)$ и $f(y)$ – непрерывные функции.

Для отыскания решения этого уравнения необходимо, как говорят, *разделить в нём переменные*, то есть переписать уравнение следующим образом:

$$f(x)dx = -g(y)dy,$$

Теперь левая часть уравнения содержит только переменную y, а правая — только x. Интегрируя обе части этого уравнения, получим общий интеграл уравнения

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C. \tag{28}$$

Замечание 7. К уравнению с разделяющимися переменными приводится уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$ и $g_2(y)$ — непрерывные функции. К нему полностью применим метод интегрирования, описанный выше. Однако наряду с решениями

$$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + C, \tag{29}$$

у данного уравнения могут быть ещё и решения вида:

$$y = y^*, \tag{30}$$

$$x = x^*, \tag{31}$$

где y^* и x^* — соответственно корни уравнений

$$g_1(y) = 0, \tag{32}$$

$$f_2(x) = 0. \tag{33}$$

Пример 7. Решить уравнение

$$(x+1)ydy - \sqrt{y^2-1}(x+2)dx = 0. \tag{34}$$

Решение. Разделяя переменные, при $x + 1 \neq 0$ и $y^2 - 1 \neq 0$, имеем

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = \int \frac{x+2}{x+1}dx.$$

Интегрируя, получаем решение исходного уравнения

$$\sqrt{y^2-1} = \ln|x+1| + x + C.$$

Решая теперь уравнения $\sqrt{y^2-1} = 0$ и $x+1=0$, находим ещё три решения уравнения (34):

$$y = 1; \quad y = -1; \quad x = -1.$$

Замечание 8. Частным случаем уравнения рассматриваемого типа является уравнение вида

$$y' = f(x)g(y), \tag{35}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – непрерывные функции. Его также называют *уравнением с разделяющимися переменными*. Решение этого уравнения находится путём объединения решений следующих уравнений:

$$g(y)=0 \tag{36}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{37}$$

Пример 8. Найти функцию, имеющую постоянную эластичность, равную k.

Решение. По условию задачи имеем

$$\frac{y'x}{y} = k, \tag{38}$$

Переписывая (38) в виде $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=k$, при $x \neq 0$ получим $\frac{dy}{y}=k\frac{dx}{x}$. Интегрируя обе части последнего равенства, находим

$$\ln|y| = k\ln|x| + \ln|C|,$$

откуда следует, что

$$y = Cx^k.$$

Автономные уравнения

Определение 16. *Уравнения вида*

$$y' = g(y)\,, \tag{39}$$

где $g(y)$ – непрерывная функция, называется ***автономным уравнением.***

Автономное уравнение является частным случаем *уравнения с разделяющимися переменными*. Его решение, как это следует из (36), (37) задаётся следующими уравнениями:

$$g(y)=0\,; \tag{40}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + C. \tag{41}$$

Определение 17. Решение вида

$$y(x) \equiv y^*, \tag{42}$$

где y^* — корень уравнения (40), называется ***стационарным***.

Если у автономного уравнения нет стационарных решений, то соотношение (41) задаёт общий интеграл уравнения.

Отметим интересное свойство, которым обладают решения автономного уравнения.

Теорема 2. *Если функция* $y = \varphi(x)$ *является решением автономного уравнения на промежутке* $(a; b)$, *то функция* $\tilde{y} = \varphi(x+C)$, где C *– произвольная константа, является решением этого уравнения на промежутке* $(a-C;\ b-C)$.

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение автономного уравнения, заданное на промежутке $(a; b)$. Рассмотрим функцию $\tilde{y} = \varphi(x+C)$, заданную на промежутке $(a-C;\ b-C)$. Имеем

$$\tilde{y}'(x) = \varphi'(x+C)\cdot(x+C)' = g(\varphi(x+C))\cdot 1 = g(\tilde{y}).$$

Следовательно, функция $\tilde{y} = \varphi(x+C)$ также является решением уравнения (39). Теорема доказана.

Замечание 9. Геометрическая трактовка *Теоремы* 2 заключается в том, что интегральные кривые автономного уравнения при сдвиге (то есть параллельном переносе) вдоль оси Ox переходят друг в друга. Кроме того, если у автономного уравнения существуют стационарные решения, то они делят плоскость Oxy на полосы, внутри которых все интегральные кривые получаются из какой-нибудь одной интегральной кривой посредством сдвига вдоль оси Ox.

Непосредственно из *Теоремы* 2 на основании (39) вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если автономное уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши, и у него отсутствуют стационарные решения, то его общее решение задается формулой

$$y = \varphi(x + C), \tag{43}$$

где $\varphi(x)$ — произвольное частное решение.

Пример 9. Рассмотрим уравнение

$$y' = y^2 + 1 .$$

Это уравнение не имеет стационарных решений и удовлетворяет всем условиям теоремы Коши на всей плоскости Oxy.

Очевидно, что решением этого уравнения является функция $y = \operatorname{tg} x$. Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \operatorname{tg}(x + C).$$

Фазовый портрет автономного уравнения

Определение 18. *Функция $g(y)$ называется* ***фазовой скоростью*** *автономного дифференциального уравнения $y' = g(y)$, ось Oy —* ***фазовой осью,*** *а её точки —* ***фазовыми точками.***

Определение 19. *Фазовые точки y_i*, в которых фазовая скорость $g(y)$ обращается в нуль, называются* ***стационарными*** *или* ***неподвижными.***

Стационарным точкам на фазовой кривой Oy соответствуют *стационарные решения $y_i = y_i$*.*

Поведение интегральных кривых автономного уравнения полностью определяется поведением фазовой скорости $g(y)$. Стационарные решения $y_i = y_i$* делят плоскость Oxy на полосы, внутри которых фазовая скорость знакопостоянна, а интегральные кривые нестационарных решений монотонны. Они либо возрастают, если $g(y) > 0$, либо убывают, если $g(y) < 0$. Чтобы охарактеризовать поведение решений автономного уравнения, достаточно нанести на фазовую ось стационарные точки и определить характер поведения решения до и после стационарной точки. Удобно это делать при помощи схем с использованием стрелок, где стрелка $\rightarrow$ означает возрастание, а стрелка $\leftarrow$, соответственно, убывание.

Возможны четыре типа стационарных точек

1) ***Аттрактор (притягивающая стационарная точка)*** $(\rightarrow \bullet \leftarrow)$ – это стационарная точка, при прохождении которой (слева направо) характер монотонности решения меняется с возрастающего на убывающий.

2) ***Репеллер (отталкивающая стационарная точка)*** $(\leftarrow \bullet \rightarrow)$ — это стационарная точка, при прохождении которой характер монотонности решения меняется с убывающего на возрастающий.

3) ***Шунт*** — это стационарная точка, при прохождении которой характер монотонности решения не меняется. Различают ***возрастающий шунт*** $(\rightarrow\bullet\rightarrow)$ и ***убывающий шунт*** $(\leftarrow\bullet\leftarrow)$.

Так, например, фазовый портрет автономного уравнения $y'=y^2$ имеет вид $(\rightarrow\bullet\rightarrow)$, следовательно, стационарная точка $x = 0$ является *возрастающим шунтом*. Фазовый портрет $(\rightarrow\bullet\leftarrow\bullet\rightarrow)$ автономного уравнения $y'=y^2-1$ показывает, что стационарная точка $y = -1$ является *аттрактором*, а точка $y=1$ — *репеллером*.

Определение 20. *Два автономных дифференциальных решения называются* ***качественно эквивалентными****, если они имеют одинаковые фазовые портреты, то есть имеют равное количество стационарных точек одинакового характера, расположенных в том же самом порядке на фазовой прямой.*

Пример 10. Распределить на группы качественно эквивалентных следующие автономные уравнения:

а) $y'=y^2$; б) $y'=(y+3)(y-4)$; в) $y'=e^y$;

г) $y'=(y+1)(e^y-1)$; д) $y'=y^2-y+1$; е) $y'=(e^y-1)^2$.

Решение. Уравнения в) и д) не имеют стационарных точек, их фазовый портрет имеет вид $(\rightarrow)$, следовательно, они качественно эквивалентны. Следующую пару качественно эквивалентных уравнений составляет уравнения а) и е), имеющие одну стационарную точку (возрастающий шунт) и соответствующий фазовый портрет $(\rightarrow\bullet\rightarrow)$. И, наконец, качественно эквиваленты уравнения б) и г), имеющие фазовый портрет $(\rightarrow\bullet\leftarrow\bullet\rightarrow)$, характеризующиеся двумя последовательными стационарными точками — аттрактором и репеллером.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 21. *Дифференциальное уравнение вида*

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0 \tag{44}$$

называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.***

При этом уравнение (44) *называется* ***однородным****, если* $\gamma(x) \equiv 0$, *и* ***неоднородным*** *в противном случае.*

Предполагается, что, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – непрерывные на промежутке (a, b) функции (причем, a и b могут соответственно равняться $-\infty$ и $+\infty$). Если $\alpha(x) \neq 0$, то уравнение (44) можно преобразовать следующим образом:

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{45}$$

где $p(x) = \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$; $f(x) = -\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$.

Остановимся первоначально на свойствах *линейного однородного уравнения*

$$y' + p(x)y = 0, \tag{46}$$

которое представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения (46). Это решение будем называть ***тривиальным***. При $y \neq 0$ имеем

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln|y| = -P(x) + \ln|C|,$$

где $P(x) = \int p(x)dx$, а C – отличная от нуля постоянная. Из последнего уравнения находим общее решение уравнения (46)

$$y = Ce^{-P(x)}. \tag{47}$$

Здесь C — уже произвольная постоянная, так как решение $y = 0$ входит в (47) при $C = 0$.

Замечание 10. Из соотношений (46) следует:

Если решение линейного однородного уравнения $y(x)$ равно нулю хотя бы в одной точке, то $y(x) \equiv 0$. Если $y(x)$ — решение уравнения (46), то для любого действительного числа C функция $Cy(x)$, также является решением этого уравнения. Сумма двух решений уравнения (46) тоже является решением. Другими словами, множество всех решений линейного однородного уравнения образует линейное пространство.

Любое решение уравнения (46) может быть получено из некоторого нетривиального решения путём умножения на постоянную. С геометрической точки зрения это означает, что интегральные кривые нетривиальных решений при растяжениях вдоль оси Oy переходят друг в друга, и все эти кривые могут быть получены из одной из них при помощи таких растяжений.

Метод вариации постоянной

Определение 22. *Дифференциальное уравнение*

$$y' + p(x)y = 0$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{48}$$

Для интегрирования неоднородного уравнения (48) воспользуемся *методом вариации постоянной* (*методом Лагранжа*). Заменим в общем решении (47) линейного однородного уравнения постоянную C на некоторую (искомую) функцию $C(x)$ и будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C(x)e^{-P(x)}. \tag{49}$$

Имеем

$$y' = C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x). \tag{50}$$

Подставляя выражения для y и y' из (49) и (50) в (48) находим

$$C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x) + p(x)Ce^{-P(x)} = f(x).$$

Отсюда получаем

$$C' = f(x)e^{P(x)}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx + C_1. \tag{51}$$

где C_1 — произвольная постоянная

Подставив теперь в формулу (49) выражение для $C(x)$, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = e^{-P(x)}\int f(x)e^{P(x)}dx + C_1e^{-P(x)}. \tag{52}$$

Замечание 11. Из соотношения (52) в силу (47) следует, что общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородно уравнения.

Пример 11. Решить уравнение

$$y' + \frac{2y}{x} = 5x^2.$$

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x},$$

откуда $\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C$, или

$$y = \frac{C}{x^2}.$$

Полагая $C = C(x)$, находим

$$y' = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}.$$

Подставив выражение для y и y' в исходное неоднородное уравнение, получим

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = 5x^2.$$

Отсюда следует, что

$$C'(x) = 5x^4.$$

Значит,

$$C(x) = x^5 + C_1 \ (C_1 = \text{const}).$$

Таким образом,

$$y(x) = x^3 + \frac{C_1}{x^2}.$$

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение 23. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (53)$$

*где $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_n(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением** n-го порядка.*

При этом уравнение (53) *называется* ***однородным***, *если* $f(x) \equiv 0$ *и* ***неоднородным*** *в противном случае.*

Уравнение (53) можно записать в более удобной компактной форме

$$L(y) = f(x). \tag{54}$$

где

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y. \tag{55}$$

— *так называемый* ***линейный дифференциальный оператор n-го порядка.***

Отметим свойство оператора $L(y)$, необходимое нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ — *произвольные функции, имеющие производные до n-го порядка включительно,* C_1 *и* C_2 — *произвольные постоянные, тогда*

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2). \tag{56}$$

Справедливость этого утверждения легко установить непосредственной проверкой.

Обратимся теперь к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения. Имеет место

Теорема 3 (*существования и единственности*). *Пусть функции* $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ *непрерывны на отрезке* (a, b). *Тогда для любой точки* $x_0 \in (a, b)$ *существует, причем единственное, решение* $y(x)$ *уравнения* (53) *определенное на отрезке* (a, b) *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Определение 24. *Уравнение*

$$L(y) = 0 \tag{57}$$

называется ***линейным однородным уравнением***, *соответствующим линейному неоднородному уравнению*

$$L(y) = f(x).$$

Теорема 4. *Общее решение линейного неоднородного уравнения* (57) *есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения* (57).

Доказательство. Покажем сначала, что сумма $y(x)$ частного решения уравнения неоднородного уравнения $\overline{y}(x)$ и произвольного решения $y_0(x)$ однородного уравнения также является решением неоднородного уравнения. Действительно, в силу леммы 1 имеем

$$L(\overline{y}+y_0)=L(\overline{y})+L(y_0)=f(x)+0=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теперь нам остается доказать, что всякое решение $y(x)$ неоднородного уравнения есть сумма $\overline{y}(x)$ и некоторого частного решения $y_0(x)$ уравнения (54). Имеем

$$L(y-\overline{y})=L(y)-L(\overline{y})=f(x)-f(x)=0.$$

Следовательно, $y_0(x)=y(x)-\overline{y}(x)$ — решение уравнения (54), значит,

$$y(x)=y_0(x)+\overline{y}(x),$$

что завершает доказательство.

Линейные однородные уравнения

В данном параграфе мы остановимся на свойствах частного и общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0$$

или, что то же самое

$$L(y)=0.$$

Лемма 2. *Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ — произвольные решения линейного однородного дифференциального уравнения и C_1, C_2, ..., C_k — произвольные постоянные, тогда линейная комбинация $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ky_k(x)$ также является решением этого уравнения.*

Действительно, на основании леммы 1 имеем

$$L(C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ky_k)=C_1L(y_1)+C_2L(y_2)+\ldots+C_kL(y_k)=0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 12. Из леммы 2 следует, что множество решений линейного однородного уравнения образует *линейное пространство.*

Естественно, возникают вопросы: какова размерность этого пространства и как устроен его базис? Чтобы ответить на них, необходимо иметь критерий, дающий возможность определить, является ли данная система решений $y_1(x)$,

$y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ *линейно зависимой* или нет? Один из способов, позволяющих это сделать, связан с так называемым определителем Вронского.

Определение 25. *Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ — система, состоящая из k функций, тогда определитель*:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}. \quad (58)$$

называется ***определителем Вронского*** *этой системы.*

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. *Если функции y_1, ..., y_k линейно независимы, то их определитель Вронского не равен нулю.*

Определение 26. *Систему функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, состоящую из n линейно независимых решений уравнения линейного однородного дифференциального уравнения n-порядка, будем называть* ***фундаментальным набором решений*** *этого уравнения.*

Ранее мы уже отмечали, что общее решение дифференциального уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных. С другой стороны, если $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ – решения уравнения (57), то функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots C_n y_n(x) \quad (59)$$

также является решением этого уравнения. Возникает вопрос: при каких условиях формулой (59) определяется общее решение линейного однородного уравнения? Ответ на этот вопрос следующая теорема.

Теорема 6 (*об общем решении линейного однородного уравнения*). *Пусть $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ – фундаментальный набор решений линейного однородного уравнения, тогда общее решение этого уравнения задается формулой*

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n. \quad (60)$$

Замечание 13. Из *Теоремы* 5 следует, что размерность линейного пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка равна n, а фундаментальный набор решений *базисом* этого пространства.

Пример 12. Для уравнения

$$y'' - 4y = 0$$

функции $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$ являются частными решениями. Эти решения линейно независимы, так как их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

не равен нулю. Значит, y_1, y_2 образуют фундаментальный набор и общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Нахождение общего решения линейного однородного уравнения требует знания какого-либо фундаментального набора решений. Последнее в общем случае является довольно сложной задачей. Однако эта задача намного упрощается, если коэффициенты уравнения постоянны. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (61)$$

где a_1, ... , a_n – некоторые постоянные.

Будем искать решение уравнения (61) в виде функции

$$y = e^{\lambda x}.$$

Тогда

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \cdots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставляя выражения для y и ее производных в уравнение (61, имеем

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} y e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0,$ то это соотношение эквивалентно уравнению

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (62)$$

Определение 27. *Алгебраическое уравнение* (62) *называется* ***характеристическим уравнением*** *линейного однородного дифференциального уравнения* (61).

Замечание 14. Нами установлено соответствие между корнями *характеристического уравнения* и решениями линейного однородного уравнения. Так как корни характеристического уравнения могут быть комплексными, то необходимо внести ясность, что мы будем понимать в этом случае под $e^{\lambda x}$. Для любого комплексного числа $z=\alpha+i\beta$ положим по определению

$$e^{z}=e^{\alpha}\left(\cos\beta+i\sin\beta\right). \tag{63}$$

Соотношение (63) носит название ***формулы Эйлера***.

В дальнейшем для простоты изложения будем оперировать с уравнениями второго порядка, то есть с уравнениями вида

$$y''+py'+qy=0. \tag{64}$$

Однако заметим, что полученные для этих уравнений результаты могут быть без труда перенесены на случай уравнений более высоких порядков.

При решении характеристического уравнения

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{65}$$

в зависимости от дискриминанта могут возникнуть три случая. Разберём последовательно каждый из них.

Случай действительных и различных корней

Если дискриминант D характеристического уравнения больше нуля, то существуют два действительных и различных корня λ_1 и λ_2 характеристического уравнения. Им соответствуют решения линейного однородного уравнения (64):

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы. Действительно, определитель Вронского

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=\left(\lambda_2-\lambda_1\right)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

ввиду того, что $\lambda_1\neq\lambda_2$, отличен от нуля. Следовательно, y_1 и y_2 образуют фундаментальный набор и общее решение уравнения (64) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 13. Решить уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение. Корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

являются числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -2$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Случай комплексных корней

Если $D < 0$. то характеристическое уравнение (65) имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Соответственно уравнение (64) имеет два линейно независимых комплексно сопряженных решения

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \;\; y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x},$$

которые на основании формулы Эйлера представимы в виде:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Чтобы получить действительные решения, заменим y_1 и y_2 их линейными комбинациями:

$$y_1^* = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad y_2^* = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2),$$

представляющими собой соответственно действительную и мнимую часть y_1.

Таким образом, мы получили два линейно независимых действительных решения:

$$y_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Следовательно, общее решение в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Пример 14. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Решение. Корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

будут $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. В данном случае $\lambda = 1$, $\lambda = 1$, так что общим решением данного дифференциального уравнения будет

$$y = e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Случай кратного корня

Если $D = 0$, то у характеристического уравнения существует единственный корень $\lambda = -\frac{p}{2}$, общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Пример 15. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y'' + 9\,y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = -3$. Поэтому, общее решение имеет вид

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Метод неопределённых коэффициентов

При специальном виде правой части $f(x)$ неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (66)$$

методика отыскания частного решения, изложенная выше, может быть заменена более простым способом. Опишем его вкратце.

В случае, когда коэффициенты левой части уравнения (66) постоянны, а правая часть имеет специальный вид

$$f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_k(x)\sin bx\right), \qquad (67)$$

где $P_n(x)$ и $Q_k(x)$ — многочлены от x степени соответственно n и k, для отыскания частного решения недородного уравнения удобнее всего воспользоваться ***методом неопределенных коэффициентов.***

Он заключается в следующем. Если число $\gamma = a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$y = e^{ax}\left(\overline{P}_m(x)\cos bx + \overline{Q}_m(x)\sin bx\right), \qquad (68)$$

где $\bar{P}_m(x)$ и $\bar{Q}_m(x)$ — многочлены степени $m = \max\{k, n\}$, коэффициенты которых необходимо определить путем подстановки неизвестной функции y в уравнение (66). Если же γ является корнем характеристического уравнения кратности l, то частное решение ищется в форме

$$y = x^{l-1} e^{ax} \left(\bar{P}_m(x) \cos bx + \bar{Q}_m(x) \sin bx \right). \tag{69}$$

Этот случай называют ***резонансным***.

Пример 16. Решить уравнение

$$y'' + 5y' + 6y = 56e^{5x}.$$

Решение. В соответствии с *Теоремой 4* общее решение данного линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму некоторого частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -3$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$\tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Так как правая часть уравнения имеет вид (67), то мы можем воспользоваться *методом неопределенных коэффициентов*. В нашем случае

$$a = 5,\ b = 0,\ P_n(x) = 1,\ Q_n(x) = 0.$$

Учитывая, что $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены нулевой степени, и что число $\gamma = 5$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение будем искать в виде

$$y = Ae^{5x}, \quad (A = const).$$

Здесь $\bar{P}_0(x) = A$ — общий вид многочлена нулевой степени. Последовательно находим

$$y' = 5e^{5x};\ y'' = 25e^{5x}.$$

Подставляя y, y' и y'' в исходное уравнение, имеем

$$56Ae^{5x} = 56e^{5x}.$$

Отсюда $A = 1$. Таким образом, частным решением исходного уравнения будет

$$y = e^{5x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{5x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

Пример 17. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Решение. В данном случае $a = 1$, $b = 0$, $P_n(x) = 1$, $Q_k(x) = 0$. Число $\gamma = 1$ совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda = 1$, который имеет кратность 2 (*резонансный случай*). Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = (C_1x + C_2)e^x.$$

Частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y = Ax^2e^x.$$

Имеем

$$y' = 2Axe^x + Ax^2e^x;$$

$$y'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, находим

$$2Ae^x = e^x, \quad A = 0,5.$$

Таким образом, частным решением неоднородного уравнения будет

$$y = 0,5x^2\, e^x.$$

В соответствии с этим общее решением исходного уравнения имеет вид:

$$y = (0,5x^2 + C_1x + C_2)e^x.$$

Приложение 3

Разностные уравнения

Общие сведения и примеры

Определение 1. *Уравнение вида*

$$F(n, y(n), y(n+1), \ldots, y(n+k)) = 0, \qquad (1)$$

где F — некоторая функция, k — фиксированное, n — произвольное натуральное число, $y(n)$, $y(n+1), \ldots$, $y(n+k)$ – члены некоторой числовой последовательности, называется ***разностным уравнением k-го порядка.***

Замечание 1. Члены последовательности $y(n)$ и $y(n+k)$ должны входить в уравнение (1) в явном виде, то есть в уравнении (1) нельзя понизить порядок путём перенумерования членов искомой последовательности.

Замечание 2. В теории разностных уравнений для обозначения членов последовательности используется как обозначение $y(n)$, так и обозначение y_n. В зависимости от ситуации мы будем использовать и то, и другое обозначение.

Определение 2. ***Решением*** *разностного уравнения называется последовательность $y_n = y(n)$, подстановка которой в уравнение (1) обращает его в тождество.*

Между теориями разностных и дифференциальных уравнений прослеживается определенная аналогия. Если в уравнении (1) произвести формальную замену:

$$n \mapsto x,\ \ y(n) \mapsto y(x),\ \ y(n+1) \mapsto y'(x),\ \ \ldots,\ \ y(n+k) \mapsto y^{(k)}(x), \qquad (2)$$

то определение разностного уравнения трансформируется в определение обыкновенного дифференциального уравнения порядка k. Проведя формальную замену (2) нетрудно получить ***нормальную форму*** записи разностного уравнения

$$y(n+k) = f(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1)). \tag{3}$$

Аналогичным образом определяется и ***задача Коши*** – как задача о нахождении решения уравнения (3), удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{cases} y(n_0) = \tilde{y}_0, \\ y(n_0+1) = \tilde{y}_1, \\ \vdots \\ y(n_0+k-1) = \tilde{y}_{k-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если функция* $f(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1))$ *определена при* $n \geq n_0$ *и принимает конечные значения, то решение* $y_n = y(n)$ *задачи Коши* (3), (4) *при* $n \geq n_0$ *определено однозначно.*

Замечание 3. Из доказательства следует, что решение разностного уравнения зависит от k начальных условий $\tilde{y}_0, \cdots, \tilde{y}_{k-1}$, то есть его можно записать в виде:

$$y(n) = \Phi(n, \tilde{y}_0, \cdots, \tilde{y}_{k-1}).$$

Обратно, если имеется семейство последовательностей

$$y(n) = \Phi(n, C_0, \cdots, C_{k-1}),$$

то исключив из системы уравнений

$$\begin{cases} y(n) = \Phi(n, C_0, \cdots, C_{k-1}); \\ y(n+1) = \Phi(n+1, C_0, \cdots, C_{k-1}); \\ \vdots \\ y(n+k-1) = \Phi(n+k-1, C_0, \cdots, C_{k-1}); \end{cases}.$$

параметры $C_0, \cdots, C_{k-1}$ мы получим разностное уравнение.

Замечание 4. Параметры $C_0, \cdots, C_{k-1}$ можно считать периодическими функциями с периодом равным единице.

Пример 1. Рассмотрим *линейное разностное уравнение первого порядка*

$$y(n+1) = y(n)\,q(n) + f(n). \tag{5}$$

Если $f(n) \equiv 0$, то есть

$$y(n+1) = y(n)\,q(n), \tag{6}$$

то уравнение называется *однородным*. Его решением, как нетрудно видеть, будет

$$y(n) = C\prod_{i=1}^{n-1} q(i)\,,\ \ n > 1\,, \tag{7}$$

причем $C = y(1)$ — произвольная постоянная.

Решение неоднородного уравнения найти тоже достаточно просто. Имеем

$$y(2) = y(1)q(1) + f(1), \tag{8}$$

$$y(3) = y(2)\,q(2) + f(2\,). \tag{9}$$

С учётом (8) из (9) получаем

$$y(3) \ = y(1)\,q(2)q(1) + q(2)\,f(1) + f(2).$$

Продолжая этот процесс, находим

$$y(n) = C\prod_{i=1}^{n-1} q(i) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(f(i)\prod_{m=i+11}^{i-1} q(m)\right) + f(n)\,.$$

где $C = y(1)$ — произвольная постоянная.

Мы видим, что общее решение линейного неоднородного разностного уравнение первого порядка, также как и линейного дифференциального уравнения первого порядка, зависит от одной произвольной постоянной и представляет собой сумму общего решения линейного однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Линейное разностное уравнение

Определение 3. *Разностное уравнение вида*

$$a_k(n)\,y_{n+k} + \ldots + a_1(n)\,y_{n+1} + a_0(n)\,y_n = f(n), \tag{10}$$

*где $a_0, a_1, \ldots, a_k, f$ — некоторые функции от n ($a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$), называется **линейным разностным уравнением k-го порядка.***

Аналогично случаю дифференциальных уравнений высшего порядка, введем ***линейный разностный оператор k-го порядка***

$$L(y) = a_k y_{n+k} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n, \qquad (11)$$

соответствующий уравнению (10). С учетом (11), уравнение (11) может быть записано в виде

$$L(y) = f(n). \qquad (12)$$

Уравнение

$$L(y) = 0 \qquad (13)$$

называется ***линейным однородным разностным уравнением***, соответствующим уравнению (12). Само же уравнение (12) (при $f(n) \not\equiv 0$) называется ***неоднородным.***

Теорема 2. (*об общем решении линейного неоднородного уравнения*). *Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения* (12) *есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения* (13).

Теорема 3 (*об общем решении линейного однородного уравнения*). *Пусть $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$ – система, состоящая из k линейно независимых решений линейного однородного разностного уравнения. Тогда общее решение этого уравнения задается формулой*

$$y(n) = C_1 y^{(1)}(n) + \ldots + C_k y^{(k)}(n). \qquad (14)$$

Множество решений линейного однородного разностного уравнения k-го порядка образует k-мерное линейное пространство, а любой набор $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$ из k линейно независимых решений (называемый ***фундаментальным набором***) является его базисом. Признаком линейной независимости решений $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$ однородного уравнения является условие $\Delta \neq 0$ при всех n, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(k)} \\ y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & \cdots & y_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k-1}^{(1)} & y_{n+k-1}^{(k)} & \cdots & y_{n+k-1}^{(k)} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

— ***определитель Казорати*** решений $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$. Определитель Казорати является аналогом определителя Вронского из теории линейных дифференциальных уравнений.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_n = -3; \\ y_4 = 17; \\ y_5 = 33. \end{cases} .$$

Решение. Уравнение

$$y_{n+2} - 4y_n = -3$$

представляет собой разностное линейное неоднородное уравнение второго порядка. Для него несложно найти частное решение

$$y_n = 1 .$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y_{n+2} - 2^2 y_n = 0 .$$

Здесь тоже несложно найти два частных решения:

$$y_n^1 = (-2)^n; \quad y_n^2 = 2^n.$$

Покажем, что эти решения линейно независимы. Вычисляя определитель Казорати, находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-2)^n & 2^n \\ -2(-2)^n & 2 \cdot 2^n \end{vmatrix} = 4(-2)^n 2^n \neq 0.$$

Итак, общим решения уравнения является

$$y_n = 1 + C_1(-2)^n + C_2 2^n .$$

Подставляя в общее решение начальные данные, мы приходим к системе

$$\begin{cases} 1 - 16C_1 + 16C_2 = 17; \\ 1 - 32C_1 + 32C_2 = 33. \end{cases}$$

Решая её, получаем

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решением задачи Коши будет

$$y_n = 1 + 2^n.$$

Замечание 5. В отличие от общего случая, для которого решение $y(n)$ задачи Коши (3), (4) определяется лишь для $n \geq n_0$, в случае линейного уравнения решение задачи Коши задаётся для любого n, в том числе и для $n < n_0$.

Линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

В случае, когда коэффициенты a_0, a_1, ..., a_k являются постоянными, методы решения линейного однородного разностного уравнения

$$a_k y_{n+k} + ... + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \ \ (a_k,\, a_0 \neq 0) \qquad (16)$$

во многом аналогичны методам решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, будем искать решения уравнения в виде

$$y_n = \lambda^n, \qquad (17)$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая постоянная. Подставляя выражение для y_n из (17) в (16), находим

$$a_k\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \ldots + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на λ^n, получим

$$a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (18)$$

Уравнение (18) называется ***характеристическим уравнением*** однородного линейного разностного уравнения.

Так же как и в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, знание корней характеристического уравнения позволяет построить общее решение однородного разностного уравнения. Для простоты изложения продемонстрируем это на примере уравнения второго порядка

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0, \quad a \neq 0, c \neq 0. \qquad (19)$$

Однако заметим, что полученные в этом случае результаты могут быть без труда перенесены на случай уравнений более высокого порядка.

В зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ характеристического уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad (20)$$

возможны следующие случаи.

Случай различных действительных корней

Случай 1. $D > 0$. Характеристическое уравнение имеет два действительных и различных корня λ_1 и λ_2. Тогда $\lambda_1 \neq 0$

и $\lambda_2 \neq 0$. Действительно, если хотя бы один корень равен нулю, то коэффициент $c = \lambda_1\lambda_2$ также будет равен нулю, что противоречит определению линейного разностного уравнения второго порядка. Корням λ_1 и λ_2 характеристического уравнения соответствуют два решения:

$$y_n^{(1)} = \lambda_1^n, \ \ y_n^{(2)} = \lambda_2^n$$

уравнения (19). Покажем, что эти решения линейно независимы. Для этого вычислим определитель Казорати, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}\lambda_2^n = \lambda_1^n\lambda_2^n(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Решить уравнение

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 0.$$

Решение. Составив характеристическое уравнение, имеем

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0.$$

Оно имеет два действительных различных корня: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_n = C_1 + C_2(-5)^n.$$

Случай комплексных корней

Случай 2. $D < 0$. Характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня λ_1 и λ_2, которые, используя тригонометрическую форму записи, могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \lambda_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

где r – модуль корня λ_1, а φ – его аргумент. Соответствующие решения разностного уравнения также комплексно сопряжены и на основании формулы Муавра имеют вид

$$y_n^{(1)} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad y_n^{(2)} = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

Чтобы получить действительные решения, заменим $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ их линейными комбинациями

$$z_n^{(1)} = \frac{1}{2}\left(y_n^{(1)} + y_n^{(2)}\right), \quad z_n^{(2)} = \frac{1}{2i}\left(y_n^{(1)} - y_n^{(2)}\right).$$

Итак, мы получили два линейно независимых действительных решения

$$z_n^{(1)} = r^n \cos n\varphi, \qquad z_n^{(2)} = r^n \sin n\varphi.$$

Таким образом, в данном случае общее решение имеет вид

$$y_n = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi).$$

Пример 4. Решить уравнение

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ и $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$, которые могут быть записаны в виде:

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \qquad \lambda_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет

$$y_n = 2^n\left(C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Случай кратного корня

Случай 3. $D = 0$. Характеристическое уравнение имеет единственный корень

$$\lambda = -\frac{b}{2a}.$$

Покажем, что в этом случае, кроме решения

$$y_n^{(1)} = \lambda^n,$$

существует еще одно решение, линейно независимое с $y_n^{(1)}$. Действительно, нетрудно убедиться, что таковым является

$$y_n^{(2)} = n\lambda^n.$$

Сначала докажем, что $y_n^{(2)}$ является решением уравнения (19). В самом деле, подставляя выражение для $y_n^{(2)}$ в уравнение (19), получим

$$a(n+2)\lambda^{n+2}+b(n+1)\lambda^{n+1}+cn\lambda^n=\lambda^n\left(a(n+2)\lambda^2+b\lambda(n+1)+cn\right)=$$

$$=\lambda^n(n(a\lambda^2+b\lambda+c)+2a\lambda^2+b\lambda)=0$$

в силу того, что $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ и $\lambda=-\dfrac{b}{2a}$.

Покажем, что частные решения $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ линейно независимы. Для этого вычислим определитель Казорати. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda^n & n\lambda^n\\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n+1}\end{vmatrix}=\lambda^{2n+1}\neq 0,$$

так как $\lambda\neq 0$. Следовательно, частные решения $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ линейно независимы, и общее решение уравнения имеет вид

$$y_n=\lambda^n(C_1+nC_2).$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y_{n+2}+6y_{n+1}+9y_n=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2+6\lambda+9=0$$

имеет единственный действительный корень $\lambda=-3$. Следовательно, общее решение исходного уравнения таково:

$$y_n=(-3)^n(C_1+nC_2).$$

Линейные неоднородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Для нахождения решения неоднородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_k y_{n+k}+\ldots+a_1y_{n+1}+a_0y_n=f(n) \qquad (21)$$

в случае, когда правая часть имеет специальный вид

$$f(n)=r^n(P_m(x)\cos n\varphi+Q_l(x)\sin n\varphi), \qquad (22)$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены от n степени соответственно m и l, также как и в случае линейных дифференциальных уравнений, используется *метод неопределенных коэффициентов,* основанный на подборе частного решения неоднородного уравнения по виду правой части $f(n)$.

Он заключается в следующем. Если число $\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$y(n) = r^n\left(\bar{P}_s(n)\cos n\varphi + \bar{Q}_s(n)\sin n\varphi\right), \tag{23}$$

где $\bar{P}_m(x)$ и $\bar{Q}_m(x)$ — многочлены степени $s = \max\{m, l\}$, коэффициенты которых необходимо определить путем подстановки неизвестной функции $y(n)$ в уравнение (22).

Если же γ является корнем характеристического уравнения кратности d, то частное решение ищется в форме

$$y(n) = n^{d-1}r^n\left(\bar{P}_s(n)\cos n\varphi + \bar{Q}_s(n)\sin n\varphi\right). \tag{24}$$

Этот случай называют ***резонансным.***

Пример 6. Решить уравнение

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 64 \times 5^n.$$

Решение. Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. В нашем случае $f(n) = 64 \times 5^n$, следовательно, $r = 5$, $\varphi = 0$, $P_0(n) = 64$, $Q_0(n) = 0$. Число $\gamma = 5$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде

$$y(n) = A \cdot 5^n.$$

Подставляя это выражение в наше уравнение, получим

$$A(25 + 10 - 3)5^n = 64 \times 5^n.$$

Следовательно, $A = 2$, а значит,

$$y(n) = 2 \times 5^n.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y_n = 2 \times 5^n + C_1 + C_2(-3)^n.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 6.$$

Решение. Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Правая часть уравнения имеет вид $f(n) = 6 \cdot (1)^n$. Значит, $r = 1$, $\varphi = 0$, $P_0(n) = 6$, $Q_0(n) = 0$. Это *резонансный случай*, так как $\gamma = 1$ совпадает с корнем характеристического уравнения λ_1. Поэтому частное решение будем искать в виде

$$y(n) = An,$$

где A — некоторая постоянная.

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим

$$A(n+2) + A(n+1) - 2An = 6;$$
$$3A = 6.$$

Следовательно, $A = 2$, а значит,

$$y(n) = 2n.$$

Таким образом, общим решением уравнения является

$$y_n = 2n + C_1 + C_2(-2)^n.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$y_{n+2} - 2y_n = 3\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

имеет два корня $\lambda_1 = \sqrt{2}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$y_n = C_1\left(\sqrt{2}\right)^n + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

Найдём теперь частное решение неоднородного уравнения. Поскольку

$$f(n) = 3\cos\frac{n\pi}{2},$$

то $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $P(n) = 3$, $Q(n) = 0$. Число $\gamma = i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде

$$y_n = A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Находим,

$$y_{n+2} = A\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right).$$

$$y_{n+2} = -A\cos\frac{n\pi}{2} - B\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Подставляя найденные выражения в исходное уравнение, получаем

$$-3A\cos\frac{n\pi}{2}-3B\sin\frac{n\pi}{2}=3\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Отсюда находим: $A = -1$, $B = 0$. Таким образом, общим решением уравнение будет

$$y_n=-\cos\frac{n\pi}{2}+C_1\left(\sqrt{2}\right)^n+C_2\left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова И.А., Гончаренко В.М., Денежкина И.Е. Методы оптимальных решений в экономике и финансах / И.А. Александрова, В.М. Гончаренков, И.Е. Денежкина, В.В. Киселев, В.С. Набатова, В.Ю. Попов, И.Г. Шандра. — М. : КНОРУС, 2014.

2. Александрова И.А., Гончаренко В.М., Денежкина И.Е. Методы оптимальных решений в экономике и финансах / И.А. Александрова, В.М. Гончаренков, И.Е. Денежкина, В.В. Киселев, В.С. Набатова, В.Ю. Попов, И.Г. Шандра : практикум / И.А. Александрова, В.М. Гончаренко, И.Е. Денежкина, В.В. Киселев, В.С. Набатова, В.Ю. Попов, И.Г. Шандра. — М. КНОРУС, 2016.

3. Александрова И.А., Гончаренко В.М., Денежкина И.Е. Математические методы в экономике и финансах / И.А. Александрова, В.М. Гончаренко, И.Е. Денежкина, В.В. Киселев, В.С. Набатова, С.В. Петропавловский, В.Ю. Попов, И.Г. Шандра, А.Б. Шаповал. — М. : КНОРУС, 2016.

4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1988.

7. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. — 5-е изд. — М. : ЛИБРОКОМ, 2012.

8. Дейли Дж., Рени Ф. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М. : ГУ ВШЭ, 2011.

9. Колемаев В.А. Математическая экономика. — М. : ЮНИТИ, 1998.

10. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. : Изд-во МГУ, 1984.

11. Понтрягин А.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. : Наука, 1979.

12. Пчелинцев С.В., Бабайцев В.А., Шандра И.Г. и др. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». — М. : Финансы и статистика, 2010. — Ч. 1, 2.

13. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике Ч. 1. Линейная алгебра. — М. : Финансы и статистика, 2009.

14. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике Ч. 2. Математический анализ. — М. : Финансы и статистика, 2009.

15. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — 10-е изд. — М. : ЛКИ/USSR, 2008.

16. Шандра И.Г. Математические аспекты макро- и микроэкономики. — М. : Финансовая академия, 1998.

17. Шандра И.Г. Математическая экономика. Ч. 1. Микроэкономика. — М. : Финансовый университет, 2013.

18. Mas-Colell Andreu, Whinston Michael D., Jerry R. Green. Microeconomic Theory. Oxford University Press. US: 1995.

19. Varian H.R. Microeconomic Analysis, W.W. Norton and Company, Third Edition, 1992.